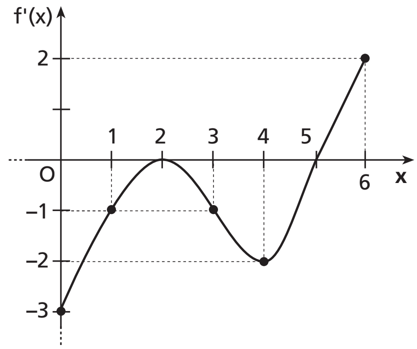
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2012

PROBLEMA 1

Della funzione f, definita per $0 \leq x \leq 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$.



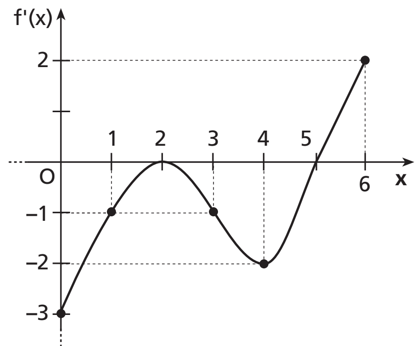
▲ **Figura 1.**

1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di x la funzione f presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ per quale valore di x la funzione f presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di f?
4. Sia g la funzione definita da $g(x) = xf(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.

PROBLEMA 1

1. La funzione f è derivabile due volte nell'intervallo $]0; 6[$. Dal grafico della derivata prima di f (figura 2) si deduce che la derivata seconda di f cambia segno nell'intorno dei punti di ascissa $x = 2$ e $x = 4$ che pertanto sono le ascisse dei due punti di flesso di f. Inoltre:

- $f'(2) = 0$ e per $0 < x < 5$ con $x \neq 2$ risulta $f'(x) < 0$, pertanto è soddisfatta la condizione sufficiente per un flesso orizzontale della funzione $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 2$;
- $f'(4) < 0$ e risulta $f''(x) < 0$ per $2 < x < 4$ e $f''(x) > 0$ per $4 < x < 5$, pertanto è soddisfatta la condizione sufficiente per un flesso obliquo ascendente della funzione $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 4$.



▲ **Figura 2.**

In sintesi, la funzione $f(x)$ ha un flesso orizzontale nel punto $x = 2$, ha un flesso obliquo ascendente nel punto $x = 4$.

2. La funzione f è continua nell'intervallo $0 \leq x \leq 6$ e pertanto, per il teorema di Weierstrass, in tale intervallo ammette il massimo e il minimo assoluto. Osserviamo dalla figura 2 per $0 \leq x \leq 6$:

- per $0 < x < 5$: $f'(x) \leq 0$, ovvero la funzione f è non crescente;
- per $5 < x < 6$: $f'(x) > 0$, cioè la funzione f è crescente.

Allora $x = 5$ è minimo relativo e anche assoluto, con $f(5) = 3$.
Dal segno della derivata prima si deduce che esistono due massimi relativi agli estremi dell'intervallo ovvero per $x = 0$ e per $x = 6$. Valutiamo la loro immagine in f per stabilire qual è massimo assoluto. Dalle ipotesi è noto che $f(0) = 9$. Determiniamo $f(6)$ applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, essendo noto $\int_0^6 f'(t)dt = -5$:

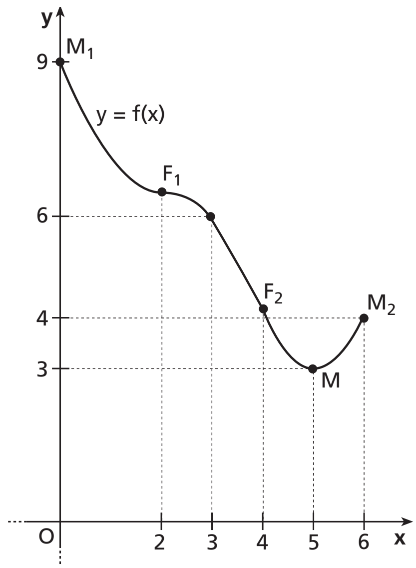
$$\int_0^6 f'(t)dt = f(6) - f(0) \rightarrow -5 = f(6) - 9 \rightarrow f(6) = 4.$$

Pertanto il massimo assoluto della funzione f è in $x = 0$ con $f(0) = 9$.

3. Sintetizziamo le informazioni note sulla funzione $f(x)$ e riportiamole su un piano cartesiano:

- $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$;
- per $0 < x < 5$, $f(x)$ è non crescente con flesso orizzontale F_1 in $x = 2$;
- per $5 < x < 6$, è crescente;
- in $x = 5$ ha il suo minimo assoluto con $f(5) = 3$, $M(5; 3)$;
- in $x = 0$ ha massimo assoluto con $f(0) = 9$, $M_1(0; 9)$;
- in $x = 6$ ha massimo relativo con $f(6) = 4$, $M_2(6; 4)$;
- in $x = 4$ ha un flesso obliquo ascendente F_2.

Nella figura 3 è rappresentato il possibile grafico della funzione $f(x)$.



▲ **Figura 3.**

4. È noto che, data una funzione generica $y = h(x)$, l'equazione della retta tangente r al grafico di h nel punto $(x_0; y_0)$, quando la tangente esiste e non è parallela all'asse y, è:

$$y - y_0 = h'(x_0)(x - x_0), \text{ con coefficiente angolare } m_r = h'(x_0).$$

Sappiamo che $f(3) = 6$ e $f'(3) = 1$, pertanto la retta s tangente a f nel punto $(3; 6)$ ha equazione:

$$y = -x + 9 \text{ con } m_s = -1.$$

Per le regole di derivazione $g'(x) = f(x) + xf'(x)$. Per la funzione $g(x) = xf(x)$, sostituendo $x = 3$, si ottiene:

$$g(3) = 18 \text{ e } g'(3) = f(3) + 3 \cdot f'(3) = 6 + 3 \cdot (-1) = 3.$$

Pertanto la retta t tangente a g nel punto $(3; 18)$ ha equazione:

$$y = 3x + 9 \text{ con } m_t = 3.$$

Determiniamo la tangente goniometrica dell'angolo γ acuto formato dalle rette s e t:

$$\text{tg}\,\gamma = \left|\frac{m_s - m_t}{1 + m_s m_t}\right| \to \text{tg}\,\gamma = \left|\frac{-1-3}{1-3}\right| = 2.$$

Ricaviamo il corrispondente angolo in gradi sessagesimali:

$$\gamma = \text{arctg}\,2 = 63{,}43\ldots° \simeq 63°\ 26'.$$