5 Dimostrare il seguente teorema: «Condizione sufficiente ma non necessaria affinché la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua nel punto a è che sia derivabile in a».

5 Si vuole dimostrare che, data una funzione reale di variabile reale $f(x)$, se essa è derivabile nel punto $x=a$, allora è in esso continua. Per definizione di derivata di una funzione nel punto $x=a$, esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale: $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(h)}{h}=f'(a)$. Si consideri l'identità $f(a+h)=f(a)+\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h$. Si calcoli il limite per $h\to 0$ del secondo membro:

$$\lim_{h\to 0}\left[f(a)+\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\right]=\lim_{h\to 0}f(a)+\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\right]=f(a)+f'(a)\cdot 0=f(a).$$

Poiché i membri dell'identità sono uguali, si può dedurre che esiste il limite $\lim_{h\to 0}f(a+h)$ e vale:

$$\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a).$$

Posto $a+h=x$, se $h\to 0$ si ha che $x\to a$.

Sostituendo nella precedente espressione:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),$$

pertanto la funzione è continua nel punto $x=a$.
In generale non vale il viceversa, cioè non è detto che una funzione continua in un punto è in esso derivabile. Per esempio, la funzione $f(x)=|x|$ è continua nel punto $x=0$ ma non è derivabile; infatti $\lim_{x\to 0}|x|=|0|=0$ ma $f'_-(0)=-1$, mentre $f'_+(0)=1$.

