PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo di base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.

2. Si calcoli, posto $a = -e^2$, l'area che è compresa fra i grafici di f e g (con $x > 0$) nella striscia di piano determinata dalle rette di equazioni $y = -1$ e $y = -2$.

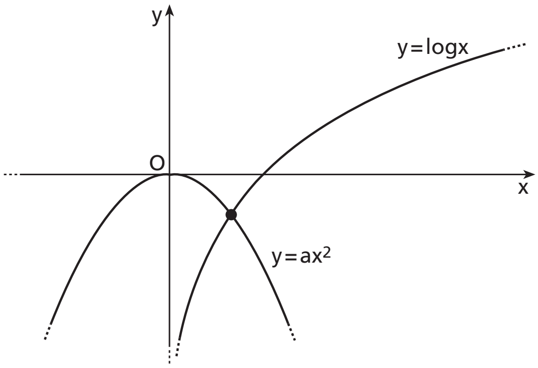
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

PROBLEMA 2

1. Primo metodo

Si discute l'equazione $\log x = ax^2$ con metodo grafico ponendo $y = \log x$ e $y = ax^2$ e determinando gli eventuali punti di intersezione tra i grafici delle due funzioni, al variare di a.

- $\boldsymbol{a < 0}$. La funzione $y = ax^2$ è rappresentata da una parabola con il vertice nell'origine e con la concavità rivolta verso il basso (figura 5).



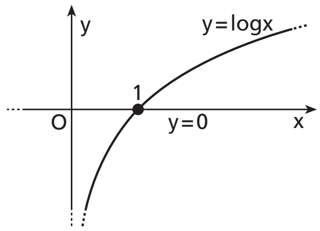
◀ **Figura 5.**

Si ha sempre un solo punto di intersezione.

- $\boldsymbol{a = 0}$. La funzione $y = ax^2$ diventa $y = 0$.

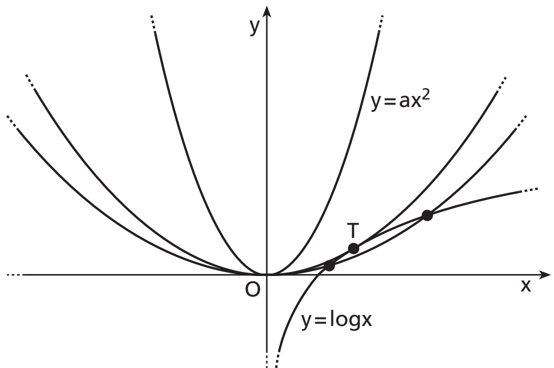
  In questo caso (figura 6) il punto di intersezione ha coordinate $(1; 0)$ e la soluzione dell'equazione è quindi $x = 1$.

▼ **Figura 6.**



- $\boldsymbol{a > 0}$. La funzione $y = ax^2$ è rappresentata da una parabola con il vertice nell'origine e con la concavità rivolta verso l'alto.

Ci sono tre possibilità al variare di a (figura 7):
- abbiamo parabole che intersecano il grafico di $y = \log x$ in due punti distinti;
- esiste una parabola tangente;
- ci sono parabole che non intersecano mai il grafico di $y = \log x$.



▶ **Figura 7.**

Determiniamo la parabola tangente. Risulta:

$$\begin{cases} ax^2 = \log x & \text{le due curve devono intersecarsi} \\ D(ax^2) = D(\log x) & \text{le due curve devono avere la stessa tangente nel punto comune} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} ax^2 = \log x \\ 2ax = \dfrac{1}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax^2 = \log x \\ ax^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log x = \dfrac{1}{2} \\ ax^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{e} \\ a = \dfrac{1}{2e} \end{cases}.$$

La parabola tangente ha quindi equazione $y = \frac{1}{2e}x^2$ e il punto di tangenza T ha coordinate $\left(\sqrt{e}; \frac{1}{2}\right)$.

Riassumendo la discussione dell'equazione $\log x = ax^2$, risulta:

- per $a \le 0$, 1 soluzione;
- per $0 < a < \sqrt{e}$, 2 soluzioni distinte;
- per $a = \sqrt{e}$, 2 soluzioni coincidenti;
- per $a > \sqrt{e}$, nessuna soluzione.

Secondo metodo

Le eventuali soluzioni dell'equazione $\log x = ax^2$ sono gli zeri della funzione $h(x) = \log x - ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$, che risulta continua nel suo campo di esistenza $D =]0; +\infty[$.

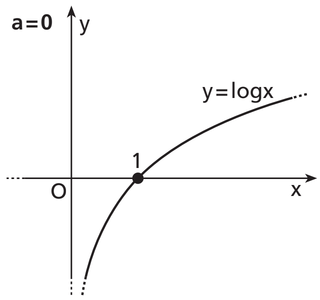
Osserviamo che per $a = 0$ si ottiene la nota funzione logaritmica che ha un unico zero in $x = 1$ (figura 8).

Sia ora $a \neq 0$ e studiamo l'andamento della funzione agli estremi del campo di esistenza.

Vale:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty \quad \text{per ogni valore di } a,$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 0 \\ -\infty & \text{se } a > 0 \end{cases}$$



▲ **Figura 8.**

Trattiamo allora separatamente i casi $a < 0$ e $a > 0$.

- ***a* < 0.** Dallo studio dei limiti effettuato, deduciamo che esistono $x_1, x_2 \in D$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$. Per il teorema degli zeri, esiste almeno un punto nell'intervallo $]x_1; x_2[$ in cui la funzione si annulla. D'altra parte, risulta:

  $$h'(x) = \frac{1}{x} - 2ax > 0 \quad \text{per } x \in D,$$

  quindi la funzione è strettamente crescente. Pertanto anche nel caso $a < 0$ l'equazione $\log x = ax^2$ ha un'unica soluzione.

- ***a* > 0.** In questo caso i limiti agli estremi del campo di esistenza sono entrambi negativi. Studiamo il segno della derivata prima $h'(x) = \frac{1 - 2ax^2}{x}$ in D. Risulta:

  $$h'(x) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 - 2ax^2 \ge 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \le \sqrt{\frac{1}{2a}}.$$

Poiché il massimo della funzione è assunto in $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$, l'esistenza degli zeri di h dipende dal segno di tale massimo. Calcoliamo l'immagine:

$$h\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = \log\sqrt{\frac{1}{2a}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(\log 2a + 1).$$

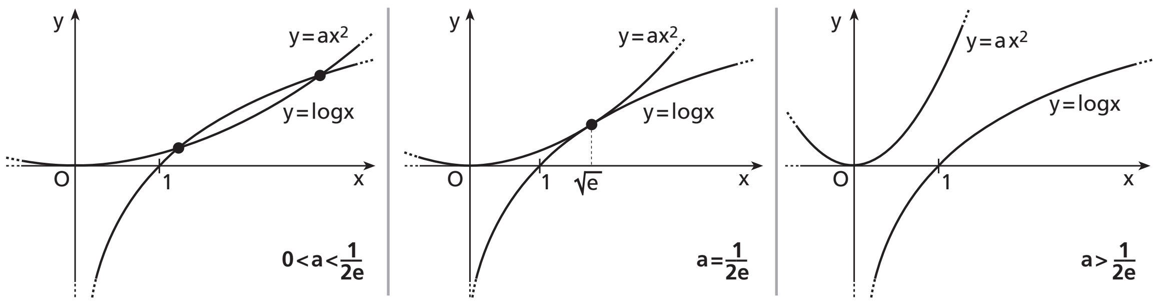
Studiamo la disequazione:

$$h\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log 2a + 1 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \le \frac{1}{2e}.$$

In conclusione:

- $0 < a < \frac{1}{2e}$: il massimo di h è positivo, i limiti agli estremi del campo di esistenza sono entrambi negativi, ed esiste un solo punto critico; quindi la funzione $h(x)$ ammette due zeri;
- $a = \frac{1}{2e}$: il massimo di h è zero ed esiste un solo punto critico, pertanto l'ascissa di tale massimo è l'unica soluzione dell'equazione assegnata dal problema;
- $a > \frac{1}{2e}$: poiché max $h < 0$, non esistono soluzioni di $h(x) = 0$.

Gli zeri dell'equazione $\log x = ax^2$ possono essere interpretati graficamente come le ascisse dei punti di intersezione tra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$, come mostra la figura 9.



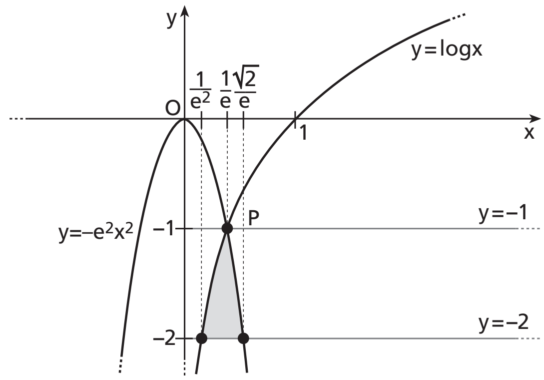
▲ **Figura 9.**

I grafici di f e g sono tangenti solo per $a = \frac{1}{2e}$. Infatti le due curve sono tangenti se e solo se si intersecano e hanno la stessa retta tangente nel punto di intersezione. Algebricamente, questo equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \\ g'(x) = f'(x) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} ax^2 = \log x \\ ax^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log x = \dfrac{1}{2} \\ ax^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Questo sistema è soddisfatto se e solo se $x = \sqrt{e}$ e $a = \frac{1}{2e}$.

2. La funzione g assume in questo caso la forma $g(x) = -e^2x^2$. Per quanto visto nel punto precedente, sappiamo che i grafici di f e g hanno un punto in comune, che in tal caso è proprio il punto $P(e^{-1}; -1)$.
Considerando le intersezioni tra la retta $y = -2$ e i grafici delle funzioni g e f, si ottengono rispettivamente i punti di ascissa e^{-2} e $\sqrt{2}e^{-1}$. Per determinare l'area $\mathcal{A}$ evidenziata in figura 10, occorre dunque suddividere il dominio di integrazione nei due intervalli $[e^{-2}; e^{-1}]$ e $[e^{-1}; \sqrt{2}e^{-1}]$.



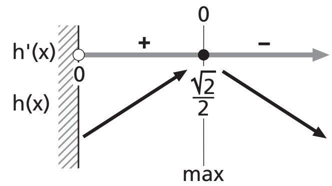
▲ **Figura 10.**

$$\mathcal{A} = \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} (\log x + 2)\, dx + \int_{e^{-1}}^{\sqrt{2}e^{-1}} (-e^2x^2 + 2)\, dx =$$

$$= [x \log x]_{e^{-2}}^{e^{-1}} + \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} x \cdot \frac{1}{x}\, dx + [2x]_{e^{-2}}^{e^{-1}} + \left[-e^2 \frac{x^3}{3} + 2x\right]_{e^{-1}}^{\sqrt{2}e^{-1}} =$$

$$= e^{-2} + \frac{4\sqrt{2}-5}{3}e^{-1}.$$

3. Scegliamo $a=1$ e studiamo la funzione $h(x) = \log x - x^2$. Per quanto visto nei punti precedenti:
- il campo di esistenza è $D =]0; +\infty[$;
- non esistono intersezioni con gli assi cartesiani e la funzione è sempre negativa perché il massimo è negativo;
- i limiti agli estremi di D sono entrambi $-\infty$;
- $f'(x) = \frac{1-2x^2}{x}$, la funzione è crescente in $\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, decrescente in $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$ e $\max_{x \in D} h(x) = h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}(\log 2 + 1)$, come riassunto nella figura 11.



▲ Figura 11.

Osserviamo che non vi sono asintoti obliqui perché $\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = -\infty$.

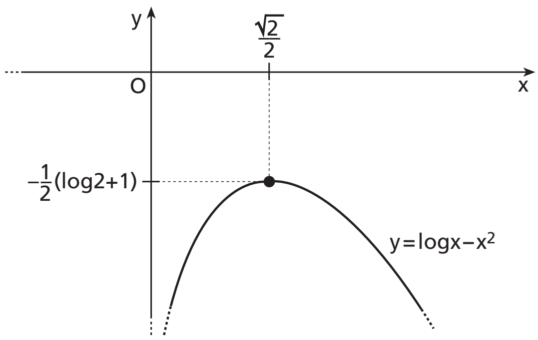
Rimane ora da studiare la derivata seconda:

$$h''(x) = \frac{-4x \cdot x - (1-2x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2-1}{x^2}.$$

Risulta quindi:

$$h''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(2x^2+1) \geq 0$$

e questa disequazione non è mai soddisfatta. Pertanto la derivata seconda è sempre negativa e la funzione ha la concavità rivolta verso il basso in tutto il campo di esistenza. Il grafico della funzione è riportato nella figura 12.



◀ Figura 12.

