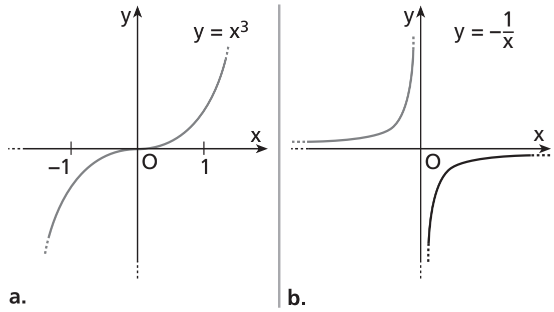
5 Sia data la funzione

$f: A \to \mathbb{R}$ con A sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$, f derivabile $\forall x \in A$.

Discuti la verità della seguente proposizione dando esauriente motivazione e riferendo almeno un esempio:
«condizione necessaria e sufficiente affinché f sia crescente (decrescente) su A è che risulti
$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0) \ \forall x \in A$».

5 Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dice crescente su A se $\forall x_1, x_2 \in A$, con $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) < f(x_2)$.
La funzione f, derivabile in A, può essere crescente su A e avere derivata nulla in qualche punto. Per esempio la funzione $f(x) = x^3$, $x \in [-1; 1]$, è crescente sull'intervallo $[-1; 1]$ ma $f'(0) = 0$ (figura 11.a). Pertanto la condizione $f'(x) > 0$ $\forall x \in A$ non è necessaria.
Se la derivata di f è positiva $\forall x \in A$ può tuttavia accadere che $f(x_1) > f(x_2)$ per qualche $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$. Per esempio la funzione $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in (\mathbb{R} - \{0\})$, è derivabile in tutto il dominio però $f(-1) > f(1)$ pur essendo $-1 < 1$ (figura 11.b). Questa funzione è crescente nei due sottoinsiemi disgiunti $\mathbb{R}^-$ ed $\mathbb{R}^+$ ma non su $(\mathbb{R} - \{0\})$. Pertanto la condizione $f'(x) > 0$ $\forall x \in A$ non è sufficiente.
La proposizione è dunque falsa.



◀ **Figura 11.**