4 Si esponga la regola del marchese de L'Hospital (1661-1704) e la si applichi per dimostrare che è:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2008}}{2^x}=0.$$

4 Enunciamo la regola di de L'Hospital. Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in un intorno di $+\infty$, sono derivabili in tale intorno, con $g'(x) \neq 0$, se le due funzioni, per $x \to +\infty$, tendono entrambe a 0 o a ∞, e se esiste il limite del rapporto delle derivate delle funzioni date, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni $\frac{f(x)}{g(x)}$, e vale:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ponendo $f(x) = x^{2008}$ e $g(x) = 2^x$, le funzioni soddisfano la regola sopra enunciata. Inoltre, ricordando che $D[x^n] = nx^{n-1}$, per $n \geq 1$, e $D[2^x] = 2^x \ln 2$, applichiamo 2008 volte il teorema di de L'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2008 \cdot 2007 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(\ln 2)^{2008}\, 2^x} = 0.$$