6 Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ (p, $q \in \mathbb{R}$), se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

6 Considerata la funzione $f(x) = x^n + px + q$, essa è continua e derivabile nel campo reale. La sua derivata vale $f'(x) = nx^{n-1} + p$. Si ricorda che se a e b sono due punti per cui $f(a) = f(b) = 0$, si può applicare il teorema di Rolle: esiste un punto c interno all'intervallo $[a; b]$ tale che: $f'(c) = 0$.
Nel caso particolare si valuta l'equazione $f'(x) = 0$ cioè $nx^{n-1} + p = 0$.

Se n è pari e quindi $n - 1$ dispari, essa ammette una e una sola radice reale. Pertanto se ci fossero tre punti per cui $f(a) = = f(b) = f(d) = 0$, ci dovrebbero essere due punti interni agli intervalli $[a; b]$ e $[b; d]$ per cui la derivata è nulla. Ciò va contro l'unicità della soluzione di $nx^{n-1} + p = 0$.
Se, invece, n è dispari, cioè $n - 1$ pari, l'equazione $nx^{n-1} + p = 0$ ammette sempre due soluzioni se $p < 0$, nessuna soluzione se $p > 0$.
Per $p < 0$, ci sono al più tre soluzioni di $f(x) = 0$, poiché se ce ne fossero quattro, si andrebbe contro l'unicità di solo due radici per $nx^{n-1} + p = 0$.
Se $p > 0$, c'è al più una soluzione di $f(x) = 0$; infatti se ce ne fossero due, per il teorema di Rolle esisterebbe un punto in cui la derivata si annulla e questo andrebbe contro alla non esistenza della soluzione dell'equazione $nx^{n-1} + p = 0$.