PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$).

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo a un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.
2. Sia P un punto di G_b. La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia r la retta passante per O tangente a G_e ($e =$ numero di *Nepero*). Qual è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y, da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

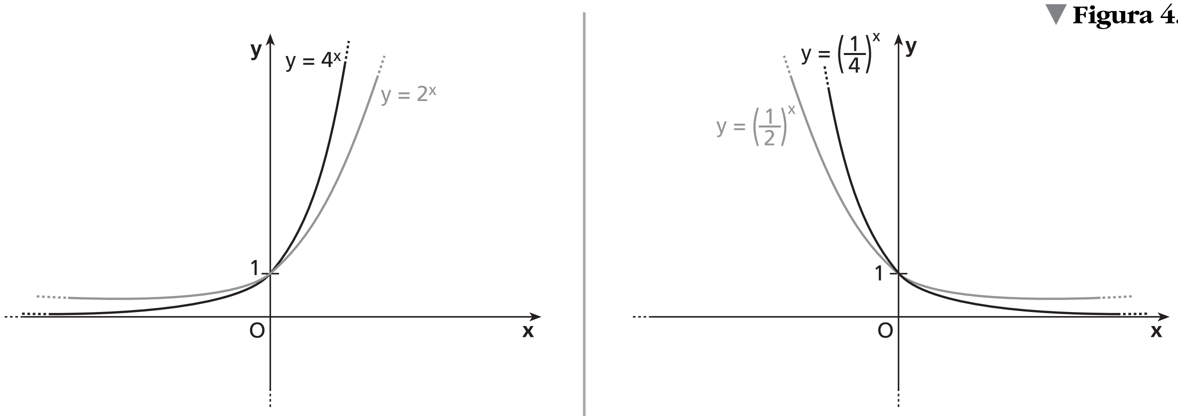
PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x) = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$) è la cosiddetta *funzione esponenziale* di base b; si distinguono due casi:

- per $b > 1$ essa è strettamente crescente, passante per il punto $(0; 1)$, con asintoto $y = 0$ per $x \to -\infty$;
- per $0 < b < 1$ essa è strettamente decrescente, passante per il punto $(0; 1)$, con asintoto $y = 0$ per $x \to -\infty$.

In figura 4 è rappresentato il relativo grafico G_b per alcuni valori della base b.

▼ **Figura 4.**



2. A titolo di esempio, consideriamo il grafico G_b nel caso $b > 1$. Sia P un punto generico di G_b di coordinate $P(a; b^a)$ con $a \in \mathbb{R}$ (figura 5).
La retta t, tangente in P al grafico, ha equazione $y - b^a = f'(a)(x - a)$ e, ricordando che $f'(x) = b^x \ln b$, otteniamo:

$$t\colon\ y = (b^a \ln b)x + b^a(1 - a \ln b).$$

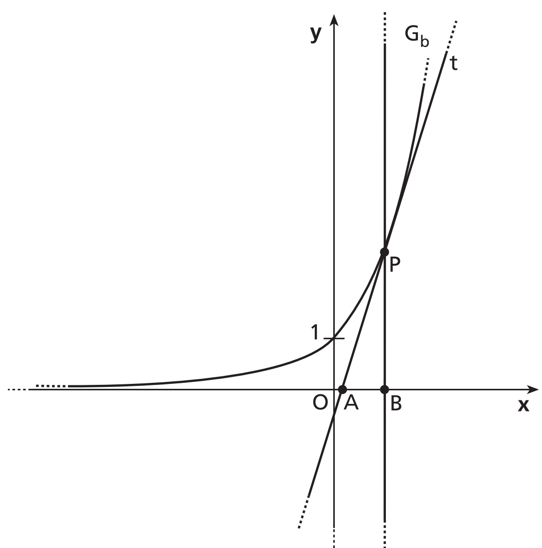
Il punto B, intersezione della parallela all'asse y e passante per P, ha coordinate $B(a; 0)$.
Ricaviamo le coordinate del punto A risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = (b^a \ln b)x + b^a(1 - a \ln b) \\ y = 0 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} x = a - \dfrac{1}{\ln b} \\ y = 0 \end{cases} \to A\left(a - \frac{1}{\ln b}; 0\right).$$

La lunghezza del segmento $\overline{AB}$ risulta:

$$\overline{AB} = \left| a - \left(a - \frac{1}{\ln b}\right) \right| = \left| \frac{1}{\ln b} \right|;$$



▲ **Figura 5.**

si osserva che tale lunghezza, essendo indipendente da a, cioè dalla scelta del punto P, è costante. Inoltre si noti che si perviene a tale risultato indipendentemente dal valore della base b cioè dal grafico G_b.

La lunghezza $\overline{AB}$ è uguale a 1 se e solo se vale:

$$\left|\frac{1}{\ln b}\right| = 1 \Leftrightarrow \ln b = \pm 1 \Leftrightarrow b = e \vee b = \frac{1}{e}.$$

3. Posto $b = e$, consideriamo la funzione esponenziale $y = e^x$. Sia $Q(c;\ e^c)$ un punto generico di G_e. La retta tangente a G_e in Q ha equazione:

$$t_Q\colon\ y = e^c x + e^c(1 - c).$$

Imponiamo a tale retta il passaggio per l'origine $O(0; 0)$:

$$0 = e^c \cdot 0 + e^c(1 - c) \quad \rightarrow \quad c = 1.$$

Pertanto la retta r passante per l'origine e tangente al grafico G_e ha equazione:

$$r\colon\ y = ex,$$

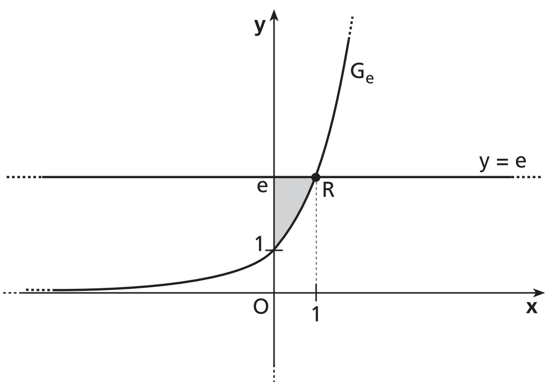
Essa ha coefficiente angolare uguale a e e l'angolo in radianti che forma con il semiasse positivo delle ascisse vale:

$$\text{arctg}\, e \simeq 1{,}22 \text{ rad}.$$

4. Consideriamo la regione di piano delimitata dall'asse y, da G_e e dalla retta di equazione $y = e$ (figura 6).

Ricaviamo le coordinate del punto R risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e = e^x \\ y = e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = e \end{cases} \rightarrow R(1; e).$$



▲ **Figura 6.**

La regione di piano ha superficie S:

$$S = \int_0^1 (e - e^x)dx = \int_0^1 e dx - \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$