

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2008**

5 Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che:

$$P(0) = P'(0) = 0, \quad P(1) = 0 \text{ e } \int_0^1 P(x) dx = \frac{1}{12}.$$

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2008

5 Il polinomio $P(x)$ è della forma:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo i coefficienti a, b, c, d in base alle condizioni imposte dal problema:

$$P(0) = d \text{ e } P(0) = 0 \rightarrow d = 0;$$

$$P(1) = a + b + c \text{ e } P(1) = 0 \rightarrow a + b + c = 0;$$

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow P'(0) = c \text{ e } P'(0) = 0 \rightarrow c = 0.$$

Risulta pertanto $b = -a$ e il polinomio è della forma: $P(x) = ax^3 - ax^2$.

Per ipotesi vale $\int_0^1 P(x) dx = \frac{1}{12}$, ed essendo

$$\int_0^1 P(x) dx = \int_0^1 (ax^3 - ax^2) dx = \left[\frac{a}{4} x^4 - \frac{a}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{a}{4} - \frac{a}{3} = -\frac{a}{12},$$

si ricava:

$$-\frac{a}{12} = \frac{1}{12} \rightarrow a = -1 \rightarrow b = 1.$$

Il polinomio cercato è pertanto:

$$P(x) = -x^3 + x^2.$$