ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione suppletiva

3 Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se $F'(a) > 0$ allora $F(x)$ è crescente in a, mentre se $F'(a) < 0$ allora $F(x)$ è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a) = 0$ ed $F''(a) < 0$.

3 Dal testo del quesito si deduce che F è derivabile almeno 2 volte nel punto a. Essendo $F''(a) < 0$ si ha che $\lim_{x \to a} \frac{F'(x) - F'(a)}{x - a} = F''(a) < 0$ e quindi, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno I di a tale che, per ogni $x \in I$ il rapporto incrementale $\frac{F'(x) - F'(a)}{x - a}$ è negativo, cioè numeratore e denominatore hanno segno discorde, e quindi si verifica: $x < a \Rightarrow F'(x) > F'(a)$ e $x > a \Rightarrow F'(x) < F'(a)$. Essendo per ipotesi $F'(a) = 0$, si ha che per ogni $x \in I$, $x < a \Rightarrow F'(x) > 0$ e $x > a \Rightarrow F'(x) < 0$, ma, poiché F è continua e derivabile in a, questa è una condizione sufficiente affinché a sia punto di massimo relativo.