PROBLEMA 1

Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ per $-2 \leq x \leq 5$ essendo g la derivata di una funzione f. Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in $(0;0)$, $(3;0)$, $\left(\frac{9}{2};0\right)$ e raggi rispettivi 2, 1, $\frac{1}{2}$.

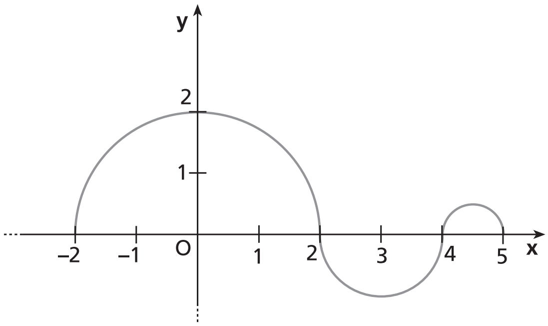


Figura 1.

a) Si scriva un'espressione analitica di $g(x)$. Vi sono punti in cui $g(x)$ non è derivabile? Se sì, quali sono? E perché?

b) Per quali valori di x, $-2 < x < 5$, la funzione f presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.

c) Se $f(x) = \int_{-2}^{x} g(t)dt$, si determini $f(4)$ e $f(1)$.

d) Si determinino i punti in cui la funzione f ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di $f(x)$? Qual è l'andamento qualitativo di $f(x)$?

PROBLEMA 1

a) Determiniamo l'espressione analitica di $g(x)$:

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & \text{se } -2\le x\le 2\\ -\sqrt{1-(x-3)^2} & \text{se } 2<x\le 4\\ \sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2} & \text{se } 4<x\le 5\end{cases} \quad\to\quad g(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & \text{se } -2\le x\le 2\\ -\sqrt{-x^2+6x-8} & \text{se } 2<x\le 4\\ \sqrt{-x^2+9x-20} & \text{se } 4<x\le 5\end{cases}$$

Per stabilire i punti di non derivabilità calcoliamo $g'(x)$:

$$g'(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} & \text{se } -2<x<2\\ \dfrac{x-3}{\sqrt{1-(x-3)^2}} & \text{se } 2<-x<4\\ -\dfrac{x-\dfrac{9}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2}} & \text{se } 4<x<5\end{cases}$$

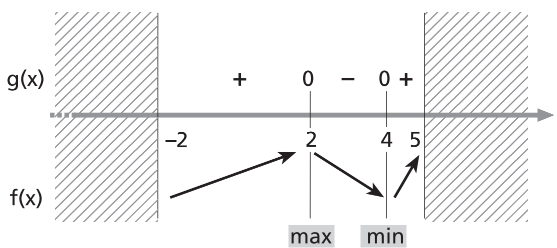
Calcoliamo i limiti negli estremi degli intervalli di definizione:

$$\lim_{x\to-2^+} g'(x)=\lim_{x\to-2^+}\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)=+\infty,$$

pertanto la funzione $g(x)$ non è derivabile in $x=-2$;
analogamente la funzione $g(x)$ non è derivabile in $x=2$, $x=4$, $x=5$ poiché risulta:

$$\lim_{x\to 2} g'(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to 4} g'(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 5^-} g'(x)=-\infty.$$

b) Poiché $g(x)$ rappresenta la derivata della funzione $f(x)$, i punti di massimo o minimo di quest'ultima sono individuati da quei punti di continuità dell'intervallo $-2<x<5$ in cui la funzione derivata g si annulla e nel cui intorno cambia di segno. Essi sono $x=2$, $x=4$.
In particolare, poiché $g(x)$ è positiva in un intorno sinistro sufficientemente piccolo di $x=2$ e negativa in un suo intorno destro, allora $x=2$ è un massimo relativo per $f(x)$ (figura 2).
Viceversa, $x=4$ è un minimo per $f(x)$.

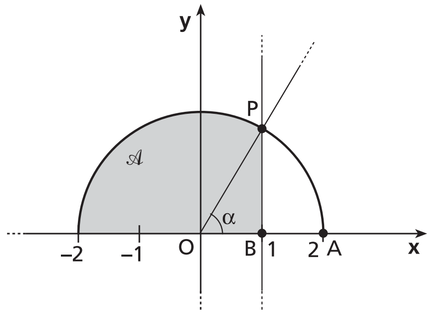


▲ **Figura 2.**

c) Considerato $f(x)=\int_{-2}^{x} g(t)dt$, risulta $f(4)=\int_{-2}^{4} g(t)dt$.
L'integrale al secondo membro corrisponde alla differenza tra le aree delle due semicirconferenze con centri $(0;0)$ e raggio 2 e $(3;0)$ e raggio 1 (figura 1):

$$f(4)=\frac{\pi\cdot 2^2}{2}-\frac{\pi\cdot 1^2}{2}=\frac{3}{2}\pi.$$

Per il calcolo di $f(1)=\int_{-2}^{1} g(t)dt$, l'integrale al secondo membro corrisponde all'area $\mathscr{A}$ della regione di piano evidenziata in figura 3.
Tale area corrisponde alla differenza tra l'area della semicirconferenza di raggio 2 e l'area del triangolo mistilineo APB, ove P ha coordinate $(1; \sqrt{3})$.
Determiniamo l'area del triangolo mistilineo come differenza tra l'area del settore circolare AOP di ampiezza $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e l'area del triangolo OBP:



▲ **Figura 3.**

$$\mathscr{A}_{APB} = \frac{2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 2}{2} - \frac{1\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \mathscr{A} = \frac{\pi\cdot 2^2}{2} - \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Segue allora che $f(1) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) I punti dell'intervallo $]-2;5[$ in cui $f(x)$ ha derivata seconda nulla sono i punti in cui la derivata prima di $g(x)$ si annulla. Si tratta quindi dei punti stazionari $x=0$, $x=3$, $x=\frac{9}{2}$.

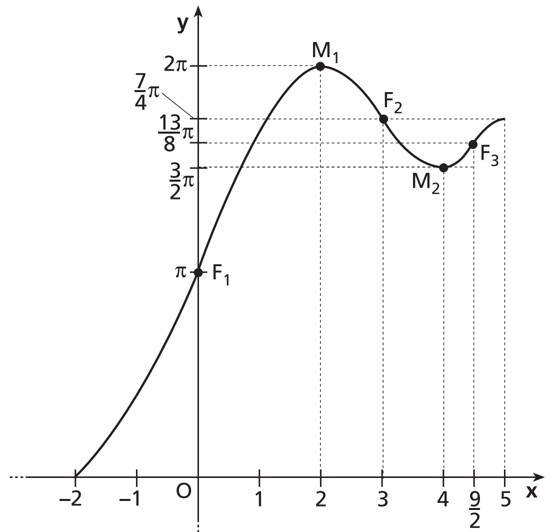
In generale, non si può dedurre il segno di una funzione dalla conoscenza della sua derivata, poiché le primitive di una stessa funzione differiscono per una costante. Se invece si assume $f(x)$ come al punto c), ovvero $f(x)=\int_{-2}^{x} g(t)dt$, con $-2 \le x \le 5$ e se si osserva il grafico di g, si deduce che $f(x) \ge 0$ poiché $f(x)$ corrisponde all'area sottesa al grafico di $g(x)$. In particolare:

- $f(-2)=0$, $\quad f(1)=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad f(2)=2\pi$,

  $f(4)=\frac{3}{2}\pi$, $\quad f(5)=\frac{7}{4}\pi$;
- f è crescente per $-2<x<2 \vee 4<x<5$
- f ammette un massimo relativo in $x=2$ e un minimo relativo in $x=4$ con $M_1(2;2\pi)$, $M_2\left(4;\frac{3}{2}\pi\right)$;
- f concava verso l'alto per $-2<x<0 \vee 3<x<\frac{9}{2}$,

  verso il basso per $0<x<3 \vee \frac{9}{2}<x<5$;
- f ammette flessi F_1, F_2, F_3 nei punti $x=0$, $x=3$, $x=\frac{9}{2}$; le corrispondenti ordinate valgono:

▼ **Figura 4.**



$$f(0)=\int_{-2}^{0} g(t)dt=\pi, \quad f(3)=\int_{-2}^{3} g(t)dt=\frac{7}{4}\pi, \quad f\left(\frac{9}{2}\right)=\int_{-2}^{\frac{9}{2}} g(t)dt=\frac{13}{8}\pi.$$

In figura 4 è rappresentato il grafico della funzione f.