8 Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

8 Sia $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Dette $f_1(x) = \pi^x$ e $f_2(x) = x^\pi$, f_1 è una funzione esponenziale, con dominio coincidente con $\mathbb{R}$, mentre f_2 è una funzione potenza ed è trascendente con dominio $\mathbb{R}^+$. Il dominio di $f = f_1(x) - f_2(x)$ è allora $\mathbb{R}^+$.

Calcoliamo la derivata prima di f:

$$f'(x) = \ln\pi \cdot \pi^x - \frac{\pi}{x} x^\pi.$$

Valutiamo il segno di $f'(x)$ nel punto $x = \pi$:

$$f'(\pi) = \ln\pi \cdot \pi^\pi - \pi^\pi = \pi^\pi(\ln\pi - 1) > 0, \text{ essendo } \ln\pi > 1.$$

Calcoliamo la derivata seconda di f:

$$f''(x) = \ln^2\pi \cdot \pi^x - \frac{\pi}{x^2} x^\pi(\pi - 1).$$

Esaminiamo il segno di $f''(x)$ nel punto $x = \pi$:

$$f''(\pi) = \ln^2\pi \cdot \pi^\pi - \frac{\pi^\pi}{\pi}(\pi - 1) = \pi^\pi\left(\ln^2\pi + \frac{1}{\pi} - 1\right) > 0, \text{ poiché } \ln\pi > 1.$$