

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2008**

- 8** Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2008

8 Sia $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Dette $f_1(x) = \pi^x$ e $f_2(x) = x^\pi$, f_1 è una funzione esponenziale, con dominio coincidente con \mathbb{R} , mentre f_2 è una funzione potenza ed è trascendente con dominio \mathbb{R}^+ . Il dominio di $f = f_1(x) - f_2(x)$ è allora \mathbb{R}^+ .

Calcoliamo la derivata prima di f :

$$f'(x) = \ln \pi \cdot \pi^x - \frac{\pi}{x} x^\pi.$$

Valutiamo il segno di $f'(x)$ nel punto $x = \pi$:

$$f'(\pi) = \ln \pi \cdot \pi^\pi - \pi^\pi = \pi^\pi (\ln \pi - 1) > 0, \text{ essendo } \ln \pi > 1.$$

Calcoliamo la derivata seconda di f :

$$f''(x) = \ln^2 \pi \cdot \pi^x - \frac{\pi}{x^2} x^\pi (\pi - 1).$$

Esaminiamo il segno di $f''(x)$ nel punto $x = \pi$:

$$f''(\pi) = \ln^2 \pi \cdot \pi^\pi - \frac{\pi^\pi}{\pi} (\pi - 1) = \pi^\pi \left(\ln^2 \pi + \frac{1}{\pi} - 1 \right) > 0, \text{ poiché } \ln \pi > 1.$$