ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2009

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da:

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x \in \mathbb{R}$.

1. Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è: $f'(x) = -\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

2. Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \leq 1$ per ogni x reale.

3. Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.

4. Si calcoli $\int_0^2 g(x)dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

Copyright © 2016 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2009

PROBLEMA 1

1. La funzione $f(x)$ ha dominio $\mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in tale campo, poiché è prodotto di una funzione polinomiale per una funzione esponenziale.
Calcoliamo la derivata di $f(x)$ utilizzando la regola del prodotto:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{2x}{2!} + \ldots + \frac{nx^{n-1}}{n!}\right)e^{-x} + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)(-e^{-x}) =$$

$$= \left(1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} =$$

$$= \left(1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} =$$

osservando che nella parentesi dell'ultima espressione sono presenti n coppie formate da monomi opposti, risulta:

$$= -\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

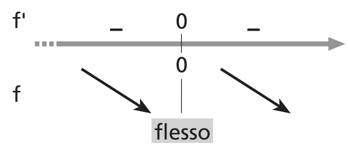
2. Studiamo il segno della derivata prima $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \geq 0 \ \rightarrow\ x^n \leq 0,$$

poiché $-e^{-x} < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Distinguiamo lo studio del segno per n pari ed n dispari.

- Se n è pari:

  $$f'(x) \geq 0 \ \rightarrow\ x^n \leq 0 \ \rightarrow\ x = 0.$$



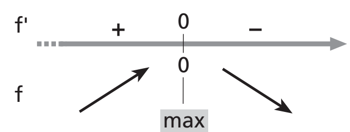
▲ **Figura 3.**

  Il quadro del segno è riportato in figura 3.
  In $x = 0$ la funzione presenta un flesso a tangente orizzontale. Perciò, se n è pari, la funzione non ammette né minimi né massimi.

- Se n è dispari:

  $$f'(x) \geq 0 \ \rightarrow\ x^n \leq 0 \ \rightarrow\ x \leq 0.$$

  Il quadro del segno della derivata prima è rappresentato in figura 4.
  In $x = 0$ la funzione ammette un unico massimo assoluto. Poiché $f(0) = 1$, il punto di massimo assoluto ha coordinate $(0;1)$.
  In particolare, se n è dispari, $f(x) \leq 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.



▲ **Figura 4.**

3. Studiamo la funzione $g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$. Essa ha come dominio $\mathbb{R}$, non interseca l'asse x poiché il polinomio $1 + x + x^2$ ha discriminante negativo, interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0;1)$, è sempre positiva nel suo dominio e non è né pari né dispari.
Calcoliamo ora i limiti per agli estremi del campo di esistenza:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{e^x}.$$

Copyright © 2016 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

Tale limite presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Applicando due volte il Teorema di De L'Hospital si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Quindi la funzione ha asintoto orizzontale $y=0$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}=+\infty,$$

non vi è però asintoto obliquo poiché risulta infinito il limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$.

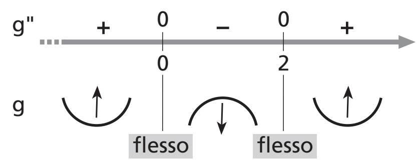
Scriviamo la funzione derivata prima $g'(x)$ utilizzando l'espressione di $f'(x)$ calcolata nel punto 1 del problema, assumendo $n=2$; si ottiene:

$$g'(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}.$$

Come già evidenziato, poiché $n=2$ è pari, la funzione g è sempre decrescente ed è priva di minimi e massimi.
Studiamo la derivata seconda e il relativo quadro del segni (figura 5):

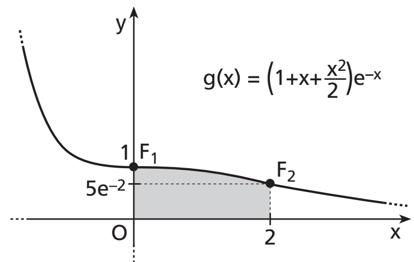
$$g''(x)=-xe^{-x}+\frac{x^2}{2}e^{-x}=\frac{x^2-2x}{2}e^{-x};$$

$$g''(x)>0\ \rightarrow\ x<0\vee x>2.$$



▲ **Figura 5.**

La funzione presenta due flessi nei punti di coordinate $F_1(0;\,1)$ e $F_2(2;\,5e^{-2})$.
Osserviamo che in F_1 il flesso è a tangente orizzontale poiché in $x=0$ si annulla anche la derivata prima.
In figura 6 è riportato il grafico della funzione $g(x)$.



▲ **Figura 6.**

4. Considerato l'integrale $\int_0^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}dx$, integriamo due volte per parti:

$$\int_0^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^2+\int_0^2(1+x)e^{-x}dx=-5e^{-2}+1+[-e^{-x}(1+x)]_0^2+\int_0^2e^{-x}dx=$$

$$=-5e^{-2}+1-3e^{-2}+1-[-e^{-x}]_0^2=-8e^{-2}+2-(e^{-2}-1)=3-9e^{-2}.$$

Tale integrale rappresenta l'area della regione di piano compresa tra il grafico di $g(x)$ e l'asse x nell'intervallo [0; 2] (figura 6).

Copyright © 2016 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone