9 Dimostra la seguente proposizione:
«Se f è una funzione strettamente positiva, derivabile in tutto il suo dominio e tale che, $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$, allora la funzione reciproca $f_1(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ soddisfa la seguente relazione:

$f_1'(x) + f_1(x) = 1$».

Se eliminiamo l'ipotesi «strettamente positiva» la proposizione è ancora vera?

9 Dalle ipotesi su f deduciamo immediatamente che f_1 esiste per tutti i punti del dominio di f; inoltre:

$$f_1'(x) = -\frac{1}{[f(x)]^2} f'(x).$$

Pertanto, poiché per ipotesi è $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$, si ha:

$$f_1'(x) + f_1(x) = -\frac{f(x) - [f(x)]^2}{[f(x)]^2} + \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)} + 1 + \frac{1}{f(x)} = 1 \qquad \text{c.v.d.}$$

Se eliminiamo l'ipotesi «strettamente positiva» la proposizione non è vera perché la funzione f_1 non esiste per quegli x tali che $f(x) = 0$. Naturalmente la proposizione rimane valida se la funzione data è strettamente negativa.