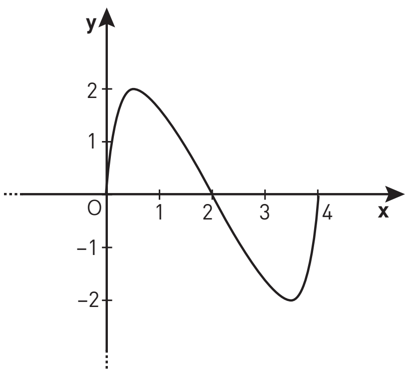
PROBLEMA 2

Sia $f(x) = (2-x)\sqrt{4x-x^2}$.

1. A lato è disegnato il grafico Γ di $f(x)$. Si dimostri che $(2; 0)$ è centro di simmetria di Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in esso a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.
2. Si dimostri che, qualunque sia t, $0 < t < 2$, le rette tangenti a Γ nei suoi punti di ascisse $2+t$ e $2-t$ sono parallele. Esistono rette tangenti a Γ che siano parallele alla retta $21x + 10y + 31 = 0$? E che siano parallele alla retta $23x + 12y + 35 = 0$?
3. Si calcoli l'area della regione compresa tra Γ e l'asse x.
4. Sia $h(x) = \text{sen}(f(x))$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte? Qual è il valore di $\int_0^4 h(x)dx$?



▲ **Figura 2.**

PROBLEMA 2

1. Sia data la funzione $f(x) = (2 - x)\sqrt{4x - x^2}$. Essa ha dominio [0; 4]. Per verificare che il corrispondente grafico Γ è simmetrico rispetto al punto (2; 0), applichiamo alla funzione la simmetria centrale di centro (2; 0), di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = -y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 - x' \\ y = -y' \end{cases}$$

e verifichiamo come si comporta la curva rispetto a tale trasformazione:

$$y = (2 - x)\sqrt{4x - x^2} \rightarrow -y' = [2 - (4 - x')]\sqrt{4(4 - x') - (4 - x')^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow y' = (2 - x')\sqrt{16 - 4x' - 16 - x'^2 + 8x'} \rightarrow y' = (2 - x')\sqrt{4x - x'^2}.$$

Si conclude che la curva è unita rispetto alla trasformazione e che pertanto il punto (2; 0) è centro di simmetria di Γ.

Determiniamo il coefficiente angolare m della retta tangente al grafico nel punto $x = 2$ ricordando che equivale alla derivata prima della funzione calcolata in quel punto:

$$f'(x) = -\sqrt{4x - x^2} + \frac{(2 - x)(2 - x)}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{-4x + x^2 + 4 - 4x + x^2}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2x^2 - 8x + 4}{\sqrt{4x - x^2}}.$$

$$m = f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 4}{\sqrt{4 \cdot 2 - 2^2}} = -2.$$

L'angolo α che la tangente forma con la direzione positiva dell'asse x è rappresentato dall'arcotangente del valore di m ovvero:

$$\alpha = \text{arctg}\, m = \text{arctg}(-2) = -63{,}43\ldots°.$$

Si tratta di un angolo negativo ovvero il proprio secondo lato si trova in senso orario sotto il semiasse positivo delle x (figura 7). Il corrispondente angolo positivo α' è:

$$\alpha' = 180° + \text{arctg}\, m = 180° + \text{arctg}(-2) =$$
$$= 180° - 63{,}43\ldots° = 116{,}56\ldots° \simeq 116°\,34'.$$

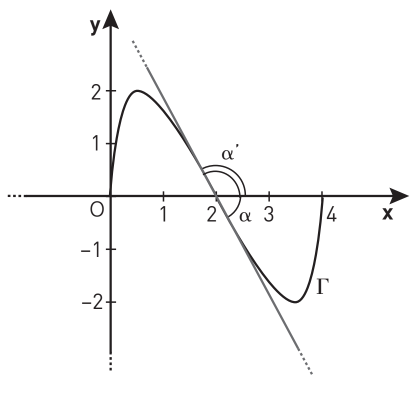


Figura 7.

2. Considerato t, con $0 < t < 2$, calcoliamo i coefficienti angolari delle rette tangenti al grafico Γ nei suoi punti di ascisse $2 + t$ e $2 - t$.

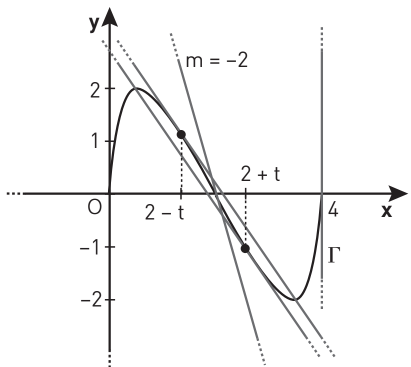
$$m(2 + t) = f'(2 + t) = \frac{2(2 + t)^2 - 8(2 + t) + 4}{\sqrt{4(2 + t) - (2 + t)^2}} = \frac{2t^2 - 4}{\sqrt{-t^2 + 4}},$$

$$m(2-t)=f'(2-t)=\frac{2(2-t)^2-8(2-t)+4}{\sqrt{4(2-t)-(2-t)^2}}=\frac{2t^2-4}{\sqrt{-t^2+4}}\,.$$

Poiché $m(2+t)=m(2-t)$, con $0<t<2$, allora le corrispondenti rette sono parallele (figura 8).
Osserviamo inoltre che agli estremi dell'intervallo del dominio risulta:

$$\lim_{t\to 2^-} m(2+t)=\lim_{t\to 2^-}\frac{2t^2-4}{\sqrt{-t^2+4}}=+\infty,\qquad \lim_{t\to 2^-} m(2-t)=\lim_{t\to 2^-}\frac{2t^2-4}{\sqrt{-t^2+4}}=+\infty.$$

Consideriamo le rette $21x+10y+31=0$ e $23x+12y+35=0$. Esse hanno coefficiente angolare rispettivamente $m=-\frac{21}{10}<-2$ e $m=-\frac{23}{12}>-2$. Per stabilire se esistono rette tangenti a Γ che siano parallele a queste, è necessario valutare i coefficienti angolari delle rette tangenti nel dominio. Per il punto 1 il coefficiente angolare della retta tangente nel punto $x=2$ vale -2. Per le considerazioni precedenti, cioè per $x\neq 2$ nei punti $(2-t)$ e $(2+t)$ il coefficiente angolare tende a $+\infty$, e osservando la figura 8 si deduce che $m\geq -2$.



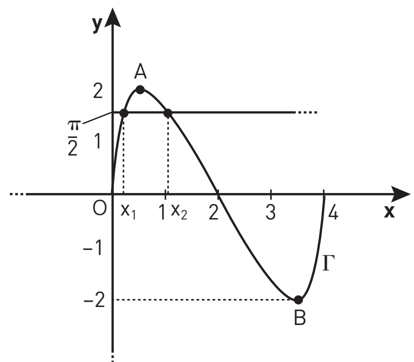
▲ **Figura 8.**

Pertanto non può esistere una retta tangente a Γ con coefficiente angolare uguale a $-\frac{21}{10}$, mentre esistono due rette tangenti e parallele con coefficiente angolare $m=-\frac{23}{12}>-2$.

3. Dimostrata la simmetria del grafico Γ nel punto 1, l'area $\mathscr{A}$ della regione compresa tra Γ e l'asse x è il doppio dell'integrale definito dalla funzione $f(x)$ calcolata in [0; 2]:

$$\mathscr{A}=2\cdot\int_0^2(2-x)\sqrt{4x-x^2}\,dx=\int_0^2(4-2x)\sqrt{4x-x^2}\,dx=$$
$$=\left[\frac{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{}\right]_0^2=\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-0\right)=\frac{16}{3}.$$

4. Sia $h(x)=\mathrm{sen}\left((2-x)\sqrt{4x-x^2}\right)$ con $0\leq x\leq 4$.
Per determinare quanti punti del grafico di $h(x)$ hanno ordinata 1, osserviamo che la funzione $h(x)=\mathrm{sen}(f(x))$ assume valore 1 per $f(x)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.



▲ **Figura 9.**

Dal grafico (figura 9) si deduce che la funzione $f(x)$ assume valori compresi tra -2 e 2 e che pertanto acquista il valore $\frac{\pi}{2}$ in due punti x_1 e x_2, per cui $h(x_1)=h(x_2)=1$. Quindi i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1 sono due.
Per dedurre l'andamento della funzione $h(x)=\text{sen}(f(x))$ studiamo puntualmente i massimi e i minimi della funzione $f(x)$ osservando il grafico Γ. Dal punto 1 è noto che $f'(x)=\frac{2(x^2-4x+2)}{\sqrt{4x-x^2}}$. Tale derivata si annulla per $x_A=2-\sqrt{2}$, con $f(x_A)=2$ (massimo assoluto) e per $x_B=2+\sqrt{2}$, con $f(x_B)=-2$ (minimo assoluto).

Poiché Γ è simmetrica rispetto al punto (2; 0) e la funzione è dispari, il grafico di $h(x)$ risulta ancora simmetrico rispetto al punto (2; 0), pertanto studiamo l'andamento della funzione $h(x)=\text{sen}(f(x))$ nell'intervallo [0; 2].

- $h(0)=h(2)=0$;
- per $0<x<x_1$, $0<f(x)<\frac{\pi}{2}$ e $f(x)$ crescente $\rightarrow h(x)$ crescente e $0<h(x)<1$;
- per $x=x_1$, $f(x_1)=\frac{\pi}{2}\rightarrow h(x_1)=1$;
- per $x_1<x<2-\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{2}<f(x)<2$ e $f(x)$ crescente $\rightarrow h(x)$ decrescente e $\text{sen}\,2<h(x)<1$;
- per $x=2-\sqrt{2}$, $f(2-\sqrt{2})=2\rightarrow h(2-\sqrt{2})=\text{sen}\,2$;
- per $2-\sqrt{2}<x<x_2$, $\frac{\pi}{2}<f(x)<2$ e $f(x)$ decrescente $\rightarrow h(x)$ crescente e $\text{sen}\,2<h(x)<1$;
- per $x=x_2$, $f(x_2)=\frac{\pi}{2}\rightarrow h(x_2)=1$;
- per $x_2<x<2$, $0<f(x)<\frac{\pi}{2}$ e $f(x)$ decrescente $\rightarrow h(x)$ decrescente e $0<h(x)<1$.

Rappresentiamo in figura 10 l'andamento di $h(x)$ tenendo conto della simmetria centrale in (2; 0).
La funzione $h(x)$ presenta:

- due massimi assoluti nei punti x_1 e x_2, con $h(x_1)=h(x_2)=1$;
- un massimo relativo per $x=4-(2-\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$, con $h(2+\sqrt{2})=-\text{sen}\,2$;
- un massimo relativo in $x=4$, con $h(4)=0$;
- due minimi assoluti in $x=4-x_2$ e $x=4-x_1$ con $h(4-x_2)=h(4-x_1)=-1$;
- un minimo relativo per $x=2-\sqrt{2}$, con $h(2-\sqrt{2})=\text{sen}\,2$;
- un minimo relativo in $x=0$, con $h(0)=0$.

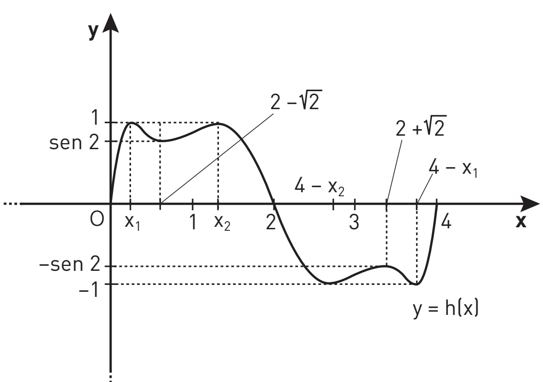


Figura 10.

Osservando il grafico di $h(x)$ vediamo che l'equazione $h(x)=k$ ha quattro soluzioni distinte quando una retta $y = k$ interseca il grafico in quattro punti distinti, ovvero per $\operatorname{sen} 2 < k < 1$ e per $-1 < k < -\operatorname{sen} 2$.

L'integrale $\int_0^4 h(x)dx$ può essere calcolato per la proprietà additiva come

$$\int_0^4 h(x)dx = \int_0^2 h(x)dx + \int_2^4 h(x)dx.$$

Per la simmetria centrale del grafico di $h(x)$ rispetto al punto $(2; 0)$ e per il significato geometrico di integrale definito, risulta $\int_2^4 h(x)dx = -\int_0^2 h(x)dx$ e quindi:

$$\int_0^4 h(x)dx = \int_0^2 h(x)dx - \int_0^2 h(x)dx = 0.$$