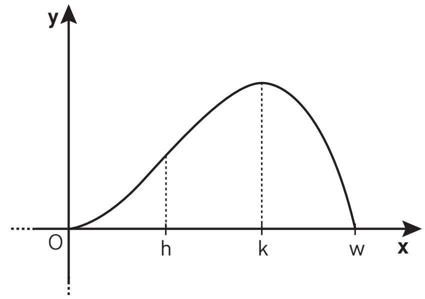
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2014

PROBLEMA 1

Nella figura a lato è disegnato il grafico Γ di $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ con f funzione definita sull'intervallo $[0; w]$ e ivi continua e derivabile. Γ è tangente all'asse x nell'origine O del sistema di riferimento e presenta un flesso e un massimo rispettivamente per $x = h$ e $x = k$.



▲ **Figura 1.**

1. Si determinino $f(0)$ e $f(k)$; si dica se il grafico della funzione f presenti punti di massimo o di minimo e se ne tracci il possibile andamento.
2. Si supponga, anche nei punti successivi 3 e 4, che $g(x)$ sia, nell'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado. Si provi che, in tal caso, i numeri h e k dividono l'intervallo $[0; w]$ in tre parti uguali.
3. Si determini l'espressione di $g(x)$ nel caso $w = 3$ e $g(1) = \frac{2}{3}$ e si scrivano le equazioni delle normali a Γ nei punti in cui esso è tagliato dalla retta $y = \frac{2}{3}$.
4. Si denoti con R la regione che Γ delimita con l'asse x e sia W il solido che essa descrive nella rotazione completa intorno all'asse y. Si spieghi perché il volume di W si può ottenere calcolando:

   $$\int_0^3 (2\pi x)g(x)dx.$$

   Supposte fissate in decimetri le unità del sistema monometrico Oxy, si dia la capacità in litri di W.

PROBLEMA 1

1. Consideriamo la funzione $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Poiché f è definita continua nell'intervallo $[0; w]$ possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale: per ogni punto x dell'intervallo la funzione $g(x)$ è derivabile e risulta $g'(x) = f(x)$. Inoltre per ipotesi $f(x)$ è derivabile, pertanto $g''(x) = f'(x)$.

Osserviamo il grafico Γ di $g(x)$ (figura 4a):

- nel punto $x = 0$ la funzione $g(x)$ è tangente all'asse x, pertanto la derivata destra $g'_+(0)$ è nulla e, tenendo conto che $g'(x) = f(x)$, vale $f(0) = 0$;
- nel punto $x = k$ la funzione $g(x)$ ha un massimo relativo e sono soddisfatte le condizioni $g'(k) = 0$ e $g''(k) < 0$, ne deriva allora che $f(k) = 0$ e $f'(k) < 0$;
- nel punto $x = h$ la funzione $g(x)$ presenta un flesso discendente, per la condizione necessaria per i flessi, la derivata seconda in tale punto risulta $g''(h) = 0$ e quindi $f'(h) = 0$.

In conclusione $f(0) = f(k) = 0$.

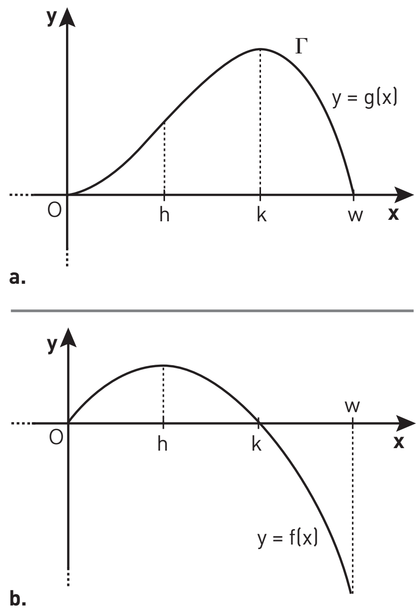


Figura 4.

Valutiamo ora il possibile andamento del grafico della funzione $f(x)$.

- Intersezione con gli assi cartesiani: per quanto visto nella dimostrazione precedente $f(0) = f(k) = 0$, pertanto il grafico di f interseca l'asse delle ascisse nei punti $x = 0$ e $x = k$.
- Segno della funzione:
  - nell'intervallo $0 < x < k$, $g(x)$ è crescente, ovvero $g'(x) > 0$, pertanto $f(x) > 0$;
  - nell'intervallo $k < x < w$, $g(x)$ è decrescente, cioè $g'(x) < 0$, quindi $f(x) < 0$.
- Studio della derivata prima ed estremanti:
  - nell'intervallo $0 < x < h$, $g(x)$ ha concavità verso l'alto, ovvero $g''(x) > 0$, pertanto $f'(x) > 0$ e f è crescente;
  - per $x = h$, $g''(h) = 0$ e quindi $f'(h) = 0$, $x = h$ è un punto stazionario per f;
  - nell'intervallo $h < x < w$, $g(x)$ ha concavità verso il basso, cioè $g''(x) < 0$, quindi $f'(x) < 0$ e f è decrescente.

  La funzione f ha allora un solo massimo relativo e quindi assoluto in $x = h$; ha due minimi relativi in $x = 0$ e $x = w$, con $f(0) = 0$ e $f(w) = g'(w) < 0$.

In figura 4b è rappresentato un possibile andamento della funzione $f(x)$.

2. Assumiamo per ipotesi che $g(x)$ sia, nell'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$. Tenendo conto che $g(0) = 0$, possiamo scrivere:

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

Calcoliamo la derivata prima $g'(x)$ e seconda $g''(x)$:

$$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$$
$$g''(x) = 6ax + 2b.$$

Imponiamo le condizioni trovate al punto 1 e raccogliamole a sistema:

$$\begin{cases} g'_+(0) = 0 \\ g'(k) = 0 \\ g''(h) = 0 \\ g(w) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 3ak^2 + 2bk + c = 0 \\ 6ah + 2b = 0 \\ aw^3 + bw^2 + 2cw = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ k(3ak + 2b) = 0 \\ 6ah + 2b = 0 \\ w^2(aw + b) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{2b}{3a} = -2\dfrac{b}{3a} \\ h = -\dfrac{1b}{3a} = -\dfrac{b}{3a} \\ w = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Poiché i valori h, k, w sono dati positivi, i coefficienti a e b hanno necessariamente segno discorde e i numeri h e k dividono l'intervallo $[0; w]$ in tre parti uguali. Inoltre la funzione ha equazione $g(x) = ax^3 + bx^2$.

3. Consideriamo $g(x) = ax^3 + bx^2$ e poniamo a sistema le condizioni $g(3) = 0$ e $g(1) = \dfrac{2}{3}$:

$$\begin{cases} 27a + 9b = 0 \\ a + b = \dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ a + b = \dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ a = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

L'espressione di $g(x)$ cercata è pertanto $g(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2$.

Troviamo le coordinate dei punti di intersezione A e B tra la retta $y = \dfrac{2}{3}$ e il grafico Γ, risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 \end{cases} \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

Risolviamo l'equazione scomponendo il polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ con la regola di Ruffini:

$$P(1) = 0 \rightarrow \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

Risulta allora:

$$x^3-3x^2+2=0 \quad \to \quad (x-1)(x^2-2x-2)=0 \quad \to \quad x=1 \quad \vee \quad x=1\pm\sqrt{3}.$$

Tenuto conto del dominio della funzione, le coordinate dei punti di intersezione A e B tra la retta $y=\frac{2}{3}$ e il grafico Γ sono: $A\left(1;\ \frac{2}{3}\right)$ e $B\left(1+\sqrt{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

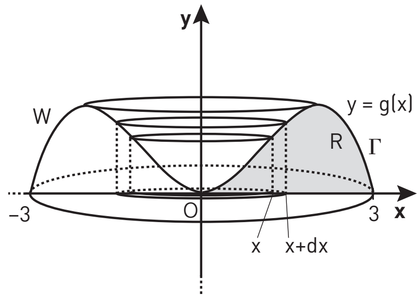
Scriviamo le equazioni delle rette n_A e n_B normali a Γ in tali punti, sfruttando il significato geometrico di derivata prima di una funzione e la proprietà di antireciprocità tra i coefficienti angolari di rette perpendicolari:

$$g'(x)=-x^2+2x \quad \to \quad g'(1)=1,\ g'(1+\sqrt{3})=-2$$

$$n_A\colon\ y-y_A=-\frac{1}{g'(x_A)}(x-x_A) \quad \to \quad y-\frac{2}{3}=-\frac{1}{1}(x-1) \quad \to \quad y=-x+\frac{5}{3}$$

$$n_B\colon\ y-y_B=-\frac{1}{g'(x_B)}(x-x_B) \quad \to \quad y-\frac{2}{3}=-\frac{1}{-2}(x-1-\sqrt{3}) \quad \to \quad y=\frac{1}{2}x+\frac{1-3\sqrt{3}}{6}$$

4. Indicata con R la regione che Γ delimita con l'asse x, si compie una rotazione completa intorno all'asse y ottenendo il solido W (figura 5).



▲ **Figura 5.**

Tale solido si può vedere composto da infiniti cilindri cavi (metodo detto spesso dei "gusci cilindrici"): ogni cilindro cavo ha volume infinitesimo dV calcolabile come differenza tra volumi di due cilindri:

$$dV=\pi(x+dx)^2g(x)-\pi x^2g(x)=2\pi xg(x)dx+\pi g(x)(dx)^2\simeq 2\pi xg(x)dx,$$

con il termine $\pi g(x)(dx)^2$ trascurabile perché $(dx)^2$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a dx. Pertanto il volume del solido è ottenibile dalla sommatoria dei volumi dei cilindri cavi, ovvero:

$$V_w=\int dV=\int_0^3(2\pi x)g(x)dx=\int_0^3(2\pi x)\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)dx=2\pi\int_0^3\left(-\frac{1}{3}x^4+x^3\right)dx=$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{15}x^5+\frac{1}{4}x^4\right]_0^3=2\pi\left(-\frac{243}{15}+\frac{81}{4}\right)=2\pi\left(-\frac{81}{5}+\frac{81}{4}\right)=\frac{81}{10}\pi.$$

Supposte fissate in decimetri le unità del sistema monometrico Oxy, la capacità in litri di W è:

$$V_w=\left(\frac{81}{10}\pi\right)\text{dm}^3\simeq 25{,}45\ \text{dm}^3=25{,}45\ \text{L}.$$