ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

7 Determinare il dominio di derivabilità della funzione $f(x) = |x^2 - 1|$

7 La funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ ha campo di esistenza reale e può essere scritta come:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{per} \quad x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & \text{per} \quad -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Essa è continua nei punti $x = -1$ e $x = 1$, poiché $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$, ed è quindi continua su tutto $\mathbb{R}$.
Si calcola ora la derivata di $f(x)$ per $x \neq \pm 1$ con le regole di derivazione:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{per} \quad x < -1 \vee x > 1 \\ -2x & \text{per} \quad -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Si osserva che nei punti $x = -1$ e $x = 1$, i limiti sinistri e destri della funzione $f'(x)$ non coincidono. Infatti:

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -2 \qquad \lim_{x \to -1^+} f'(x) = 2;$$
$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 2.$$

Si può allora concludere che la funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ è derivabile in $\mathbb{R}$ escluso nei punti $x = -1$ e $x = 1$.

