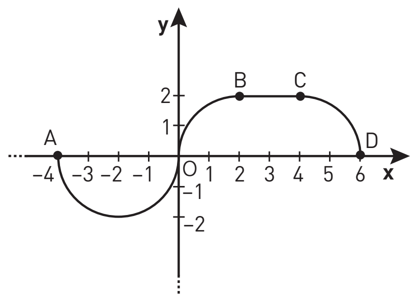
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2014

PROBLEMA 1

Sia $g(x)$ una funzione continua sull'intervallo chiuso $[-4; 6]$. Il grafico di $g(x)$, disegnato a lato, passa per i punti $A(-4; 0)$, $O(0; 0)$, $B(2; 2)$, $C(4; 2)$, $D(6; 0)$ e consiste della semicirconferenza di diametro AO, dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi O e B, del segmento BC e dell'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x.



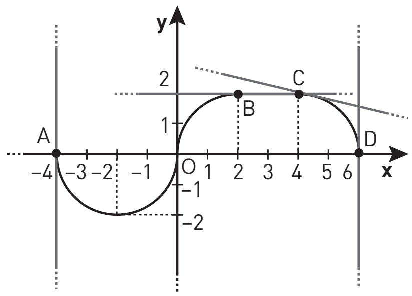
▲ **Figura 1.**

1. Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti A, O, B, C, D.
2. Posto $f(x) = \int_{-4}^{x} g(t)dt$, si calcolino: $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$.
3. Per quali valori di $x \in [-4; 6]$, $f(x)$ è positiva, negativa o nulla? E per quali x è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda $f''(x)$?
4. La funzione $f(x)$ presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di $f(x)$?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2014

PROBLEMA 1

1. Sia $g(x)$ la funzione continua nell'intervallo chiuso $[-4; 6]$ il cui grafico è rappresentato nella figura 4. Valutiamo se tale funzione è derivabile nei punti A, O, B, C, D, tenendo conto del significato geometrico della derivata prima di una funzione in un punto, ossia coincidente con il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in quel punto.



▲ **Figura 4.**

- In $A(-4; 0)$: il grafico consiste a destra nella semicirconferenza di diametro AO; nel punto A la tangente è verticale, pertanto in tale punto la funzione non è derivabile a destra;
- in $O(0; 0)$: il grafico è rappresentato a sinistra dalla semicirconferenza di diametro AO, mentre a destra dal quarto di circonferenza di estremi O e B; nel punto O la tangente è verticale pertanto in tale punto la funzione non è derivabile;
- in $B(2; 2)$: il grafico consiste, a sinistra, nel quarto di circonferenza, di estremi O e B, mentre a destra, nel segmento orizzontale BC; nel punto B la tangente è $y=2$, pertanto in tale punto la funzione è derivabile, con valore $g'(2)=0$;
- in $C(4; 2)$ il grafico è rappresentato, a sinistra, dal segmento orizzontale BC, pertanto $g'_{-}(4)=0$, mentre, a destra, dall'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x; troviamo l'equazione di tale arco imponendo alla generica parabola con vertice in D, $x=-ay^2+6$, il passaggio per il punto $C(4; 2)$:

  $$x=-ay^2+6 \quad \rightarrow \quad 4=-a\cdot 2^2+6 \quad \rightarrow \quad a=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad g(x)=\sqrt{12-2x},\ 4\leq x\leq 6.$$

  Calcoliamo la derivata prima:

  $$g'(x)=\frac{-1}{\sqrt{12-2x}} \quad \rightarrow \quad g'_{+}(4)=-\frac{1}{2},$$

  pertanto, essendo $g'_{-}(4)=0$ e $g'_{+}(4)=-\dfrac{1}{2}$, in tale punto la funzione non è derivabile;
- in $D(6; 0)$: l'arco di parabola ha nel vertice tangente verticale; pertanto in tale punto la funzione non è derivabile a sinistra.

2. Posto $f(x)=\int_{-4}^{x} g(t)dt$, calcoliamo $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ sfruttando il teorema fondamentale del calcolo integrale e il calcolo di aree comprese tra una curva e l'asse x.

- $\boldsymbol{f(-4)}=\int_{-4}^{-4} g(t)dt=0.$
- $\boldsymbol{f(0)}$**.** Corrisponde all'opposto dell'area di metà cerchio di raggio 2:

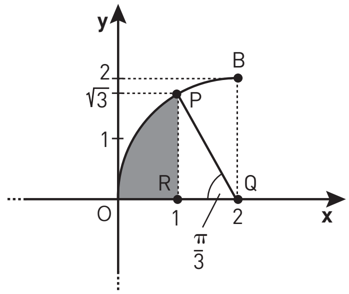
  $$f(0)=-\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2=-2\pi.$$
- $\boldsymbol{f(1)}$**.** Sfruttiamo la proprietà additiva del calcolo integrale:

  $$f(1)=\int_{-4}^{1} g(t)dt=\int_{-4}^{0} g(t)dt+\int_{0}^{1} g(t)dt=f(0)+\int_{0}^{1} g(t)dt=-2\pi+\int_{0}^{1} g(t)dt;$$

l'integrale $\int_0^1 g(t)dt$ corrisponde all'area evidenziata in figura 5; il triangolo PQR risulta metà di un triangolo equilatero di lato 2 e altezza $\sqrt{3}$, mentre il settore circolare OQP ha ampiezza $\frac{\pi}{3}$ e raggio 2; si può ottenere tale area come differenza tra l'area del settore circolare e l'area del triangolo PQR:

$$f(1) = -2\pi + \int_0^1 g(t)dt = -2\pi + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3}\right) = -2\pi + \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



▲ Figura 5.

- ***f*(2).** Applichiamo l'additività integrale:

$$f(2) = \int_{-4}^{2} g(t)dt = \int_{-4}^{0} g(t)dt + \int_0^2 g(t)dt = f(0) + \int_0^2 g(t)dt.$$

Poiché l'integrale $\int_0^2 g(t)dt$ corrisponde a un quarto di cerchio di raggio 2, risulta:

$$f(2) = -2\pi + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = -\pi.$$

- ***f*(4).** Sfruttiamo la proprietà additiva del calcolo integrale:

$$f(4) = \int_{-4}^{4} g(t)dt = \int_{-4}^{2} g(t)dt + \int_2^4 g(t)dt = f(2) + \int_2^4 g(t)dt.$$

L'integrale $\int_2^4 g(t)dt$ rappresenta l'area di un quadrato di lato 2, pertanto vale:

$$f(4) = -\pi + 2^2 = -\pi + 4.$$

- ***f*(6).** Applichiamo nuovamente l'additività:

$$f(6) = \int_{-4}^{6} g(t)dt = \int_{-4}^{4} g(t)dt + \int_4^6 g(t)dt = f(4) + \int_4^6 g(t)dt.$$

Calcoliamo l'integrale $\int_4^6 g(t)dt$ come metà del segmento parabolico inscritto in un rettangolo di dimensioni 2 e 4:

$$f(6) = -\pi + 4 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (2 \cdot 4)\right) = -\pi + 4 + \frac{8}{3} = -\pi + \frac{20}{3}.$$

3. Per valutare il segno della funzione $f(x) = \int_{-4}^{x} g(t)dt$ ricordiamo che per il teorema fondamentale del calcolo integrale risulta $f'(x)=g(x)$, con $-4<x<6$; dal grafico di $g(x)$ di figura 4 e dai risultati al punto 2 ne segue che:

– per $-4<x<0$, $g(x)<0$ $\to$ $f'(x)<0$ $\to$ $f(x)$ decrescente con $f(-4)=0$ e $f(0)=-2\pi$;
– per $x=0$, $g(0)=0$ $\to$ $f'(0)=0$ $\to$ $f(x)$ ha punto stazionario per $x=0$;
– per $0<x\leq 2$, $g(x)>0$ $\to$ $f'(x)>0$ $\to$ $f(x)$ crescente con $f(0)=-2\pi$ e $f(2)=-\pi$;
– per $2<x\leq 4$, $g(x)=2$ $\to$ $f'(x)=2$ $\to$ $f(x)$ crescente con $f(2)=-\pi$ e $f(4)=-\pi+4$;
– per $4<x<6$, $g(x)>0$ $\to$ $f'(x)>0$ $\to$ $f(x)$ crescente con $f(4)=-\pi+4$ e $f(6)=-\pi+\frac{20}{3}$.

Dal quadro si deduce che esiste un $\bar{x}\in\,]2;4[$, zero della funzione ovvero:

$$f(\bar{x})=0 \to \int_{-4}^{2} g(t)dt+\int_{2}^{\bar{x}} g(t)dt=0 \to f(2)+\int_{2}^{\bar{x}} 2dt=0 \to$$

$$\to -\pi+2(\bar{x}-2)=0 \to \bar{x}=2+\frac{\pi}{2}.$$

In sintesi:

- $f(x)>0$ per $2+\frac{\pi}{2}<x\leq 6$;
- $f(x)<0$ per $-4<x<2+\frac{\pi}{2}$;
- $f(x)=0$ per $x=-4 \vee x=2+\frac{\pi}{2}$.

Per valutare il segno della derivata seconda $f''(x)$ sfruttiamo nuovamente il teorema fondamentale del calcolo integrale, ricavando che $f''(x)=g'(x)$, con $-4<x<6$. Osservando la crescenza e decrescenza del grafico di $g(x)$ di figura 4 si deduce che:

- $f''(x)>0$ per $-2<x<0 \vee 0<x<2$;
- $f''(x)<0$ per $-4<x<-2 \vee 4<x<6$;
- $f''(x)=0$ per $2\leq x<4 \vee x=-2$.

Si osserva che per il punto 1 la funzione $f''(x)=g'(x)$ non è definita per

$$x=-4 \wedge x=0 \wedge x=4 \wedge x=6.$$

4. Dai precedenti punti sintetizziamo le informazioni sulla funzione $f(x)$:

- è una funzione definita continua nell'intervallo $[-4.\ 6]$;
- passa per i punti:

$$A'(-4;0),\ O'(0;-2\pi),\ B'(2;-\pi),\ C'(4;-\pi+4),\ D'\left(6;-\pi+\frac{20}{3}\right);$$

- ha segno:
  – $f(x)>0$ per $2+\frac{\pi}{2}<x\leq 6$;
  – $f(x)<0$ per $-4<x<2+\frac{\pi}{2}$;
  – $f(x)=0$ per $x=-4 \vee x=2+\frac{\pi}{2}$;
- ha derivata prima tale che:
  – $f(x)$ decrescente per $-4<x<0$,

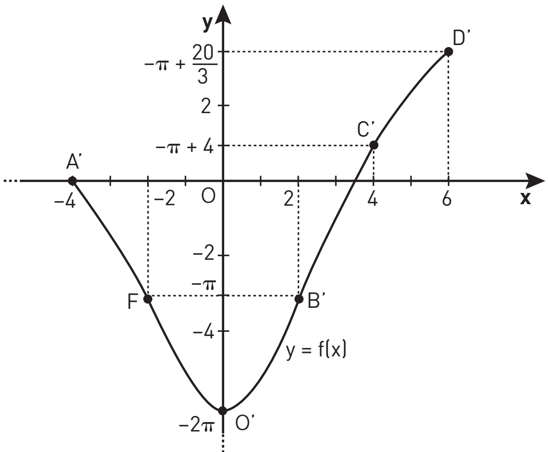
– $f'(0) = 0$ allora $x = 0$ punto stazionario;

– $f(x)$ crescente per $0 < x < 6$,

pertanto, per il teorema di Weierstrass, la funzione ha minimo assoluto nel punto $O'(0; -2\pi)$, massimo relativo per $x = 6$ e $x = -4$ con $f(6) = -\pi + \frac{20}{3}$, $f(-4) = 0$ e quindi massimo assoluto in $D'\left(6; -\pi + \frac{20}{3}\right)$;

- ha derivata seconda tale che la funzione ha:
  – concavità verso l'alto per $-2 < x < 0 \vee 0 < x < 2$;
  – concavità verso il basso per $-4 < x < -2 \vee 4 < x < 6$;
  – un flesso per $x = -2$, $F(-2; -\pi)$, mentre $f''(x) = 0$ per $2 \leq x < 4$, pertanto il grafico è un segmento $B'C'$, sorretto dalla retta di equazione $y = 2x + \pi - 4$.

In figura 6 è riportato l'andamento della funzione $f(x)$.



◀ **Figura 6.**