2 Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $xe^{x} + xe^{-x} - 2 = 0$.

2 Poiché $x=0$ non è soluzione, l'equazione di partenza è equivalente a $e^x+e^{-x}-\frac{2}{x}=0$.

Posto $f(x)=e^x+e^{-x}-\frac{2}{x}$, si tratta di determinare quanti zeri ha la funzione f. Per $x<0$ essa è sempre positiva, pertanto in questo intervallo non ha zeri. Nell'intervallo $]0;+\infty[$ i limiti agli estremi valgono: $\lim_{x\to 0^+} f=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f=+\infty$ e, essendo la funzione ivi continua, essa assume sia valori positivi che negativi. Per il teorema dell'esistenza degli zeri, esiste allora almeno uno zero. Se si assume che ci sono due zeri, deve valere $f(x_1)=f(x_2)=0$. Pertanto per il teorema di Rolle esiste almeno un punto $c\in]x_1;x_2[$ tale che $f'(c)=0$. La derivata prima è $f'(c)=e^x-e^{-x}+\frac{2}{x^2}$ che è sempre positiva per $x>0$. Infatti per $x>0$ si ha $e^x>e^{-x}$, quindi $e^x-e^{-x}>0$, mentre $\frac{2}{x^2}$ è una quantità sempre positiva. Si è raggiunto così un assurdo, quindi la funzione ha un solo zero. In conclusione, l'equazione $xe^x+xe^{-x}-2=0$ ha una sola radice.