10 Si consideri la funzione $\frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hospital.

10 Dato il limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x-\cos x}$, si raccoglie x al numeratore e al denominatore della frazione:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x-\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)}.$$

Poiché $-1\leq\operatorname{sen}x\leq 1$ e quindi $-\frac{1}{x}\leq\frac{\operatorname{sen}x}{x}\leq\frac{1}{x}$, per il teorema del confronto vale $\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=0$.

Allo stesso modo si dimostra che $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$. Pertanto esiste il limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x-\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)}=1.$$

Alla luce del teorema di De L'Hospital, volendo trattare il limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, una delle condizioni dell'ipotesi è che deve esistere un valore M tale che, $\forall x>M$, le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano derivabili e $g'(x)\neq 0$. Nel caso in questione $g(x)=x-\cos x$ e $g'(x)=1+\operatorname{sen}x$. Si osserva che la derivata prima si annulla per $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ con k intero e quindi non esiste un intorno di $+\infty$ in cui valga sempre $g'(x)\neq 0$. Pertanto il teorema non può essere applicato.