

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**  
**CORSO DI ORDINAMENTO • 2004**  
**Sessione straordinaria**

■ **PROBLEMA 2**

In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{1 + a \operatorname{sen} x}{\cos x},$$

dove  $a$  è un parametro reale.

- a) Dimostrare che si tratta di curve periodiche con periodo  $2\pi$ , che hanno in comune infiniti punti dei quali si chiedono le coordinate.
- b) Tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- c) Controllato che due curve soddisfano alla condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse  $y$  e disegnarle nell'intervallo  $-\pi \leq x \leq \pi$ , dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

**SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME**  
**CORSO DI ORDINAMENTO • 2004**  
**Sessione straordinaria**

■ **PROBLEMA 2**

a) Posto  $f_a(x) = \frac{1 + a \sin x}{\cos x}$ , essa può essere scritta come  $f_a(x) = \frac{1}{\cos x} + a \tan x$ . La periodicità della funzione coseno è  $2\pi$ , cosicché  $\frac{1}{\cos x}$  è periodica di periodo  $T_1 = 2\pi$ ;  $\tan x$  ha periodicità  $\pi$  per cui il periodo di  $a \tan x$  è  $T_2 = \pi$ . La funzione  $f_a$  è somma di funzioni periodiche: essa è allora periodica di periodo  $T = \text{m.c.m.}(T_1, T_2)$  cioè  $T = 2\pi$ .

Presi due valori arbitrari di  $a$ ,  $a_1$  e  $a_2$  con  $a_1 \neq a_2$ , e le corrispondenti funzioni  $f_{a_1}$  e  $f_{a_2}$ , i loro punti comuni soddisfano l'equazione  $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$ , cioè:

$$\frac{1}{\cos x} + a_1 \tan x = \frac{1}{\cos x} + a_2 \tan x \quad \rightarrow \quad (a_1 - a_2) \tan x = 0 \quad \rightarrow \quad \tan x = 0 \quad \rightarrow \quad x = k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Le coordinate di tali punti sono:  $(2k\pi; 1)$  e  $((2k+1)\pi; -1)$ .

Vista l'arbitrarietà di  $a_1$  e  $a_2$  si può concludere che le curve  $f_a(x) = \frac{1 + a \sin x}{\cos x}$  hanno in comune infiniti punti di coordinate  $(2k\pi; 1)$  e  $((2k+1)\pi; -1)$ .

b) La funzione  $y = \frac{1 + a \sin x}{\cos x}$  ha campo di esistenza C.E.:  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$  e derivata prima:

$$y' = \frac{a \cos^2 x + \sin x(1 + a \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + a}{\cos^2 x}. \text{ La curva ha tangente orizzontale nei punti in cui la}$$

derivata prima si annulla, ossia per  $\sin x = -a$ . Condizione necessaria per l'esistenza di tali punti è quindi:  $|a| < 1$ . La loro ordinata si trova sostituendo  $\sin x = -a$  nell'equazione della funzione e perciò

vale:  $y = \frac{1 - a^2}{\pm \sqrt{1 - a^2}}$ . Imponendo per ipotesi  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e tenendo conto che  $|a| < 1$ , risulta:

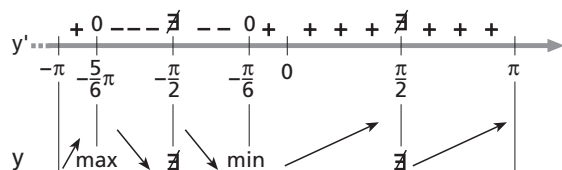
$$\frac{1 - a^2}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \sqrt{1 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad 1 - a^2 = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad a = \pm \frac{1}{2}.$$

Tali valori sono entrambi accettabili; pertanto le curve che hanno come tangente orizzontale la retta di

equazione  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  sono:  $y = \frac{1 + \frac{1}{2} \sin x}{\cos x}$ , cioè  $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$ , e  $y = \frac{1 - \frac{1}{2} \sin x}{\cos x}$ , ovvero  $y = \frac{2 - \sin x}{2 \cos x}$ .

c) Considerata la funzione  $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$ , si applica la simmetria rispetto all'asse  $y$ :  $\begin{cases} X = -x \\ Y = y \end{cases}$ . La funzione trasformata è  $Y = \frac{2 + \sin(-X)}{2 \cos(-X)}$  ovvero  $Y = \frac{2 - \sin X}{2 \cos X}$ . Essa coincide con la funzione  $y = \frac{2 - \sin x}{2 \cos x}$  nello stesso sistema di assi cartesiani. Pertanto si conclude che le funzioni  $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$  e  $y = \frac{2 - \sin x}{2 \cos x}$  sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse delle ordinate.

Per rappresentare i loro grafici nell'intervallo  $-\pi \leq x \leq \pi$ , è sufficiente compiere lo studio di una sola di esse, per esempio  $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$ . Il suo campo di esistenza è C.E.:  $x \neq \pm \frac{\pi}{2}$ . Essa non è né pari né dispari. Non ha intersezioni con l'asse  $x$  poiché il numeratore della funzione,  $2 + \sin x$ , non si può mai annullare ed è sempre positivo; l'intersezione con l'asse  $y$  è  $(0; 1)$ . La funzione è positiva per  $\cos x > 0$  cioè per  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ; è negativa per  $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ . I limiti agli estremi del campo di esistenza sono:  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{2 + \sin x}{2 \cos x} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} \frac{2 + \sin x}{2 \cos x} = -\infty$ ; pertanto la curva ha asintoti verticali  $x = -\frac{\pi}{2}$  e  $x = \frac{\pi}{2}$ . Nei punti  $x = -\pi$  e  $x = \pi$  il grafico ha coordinate  $A(-\pi; -1)$  e  $B(\pi; -1)$ . La funzione derivata è  $y' = \frac{2 \sin x + 1}{2 \cos^2 x}$ . Essa si annulla nei punti  $x = -\frac{5}{6}\pi$  e  $x = -\frac{\pi}{6}$ . Nella figura 3 è riportata la tabella del suo segno.



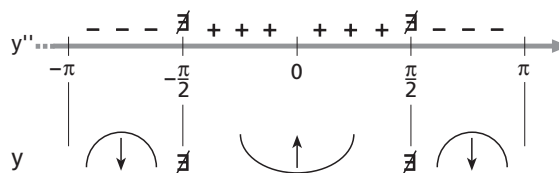
◀ Figura 3.

La funzione  $y$  ha un massimo nel punto  $x = -\frac{5}{6}\pi$  e un minimo per  $x = -\frac{\pi}{6}$ . Le corrispondenti coordinate sul grafico valgono  $M\left(-\frac{5}{6}\pi; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  e  $N\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

La derivata seconda della funzione è

$$y'' = \frac{\sin^2 x + \sin x + 1}{\cos^3 x}.$$

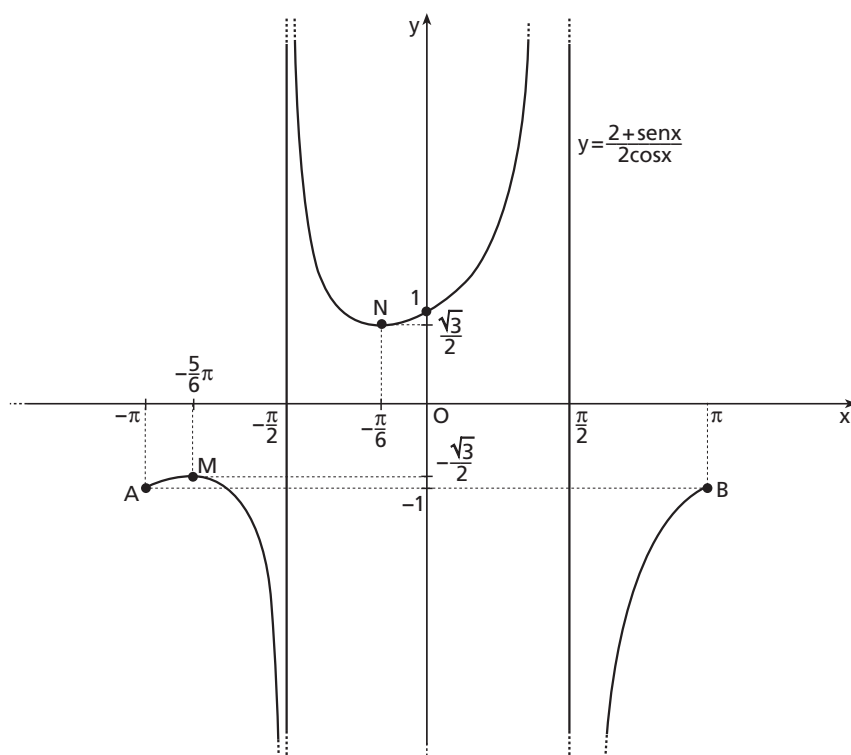
La tabella del suo segno è indicata nella figura 4.



► Figura 4.

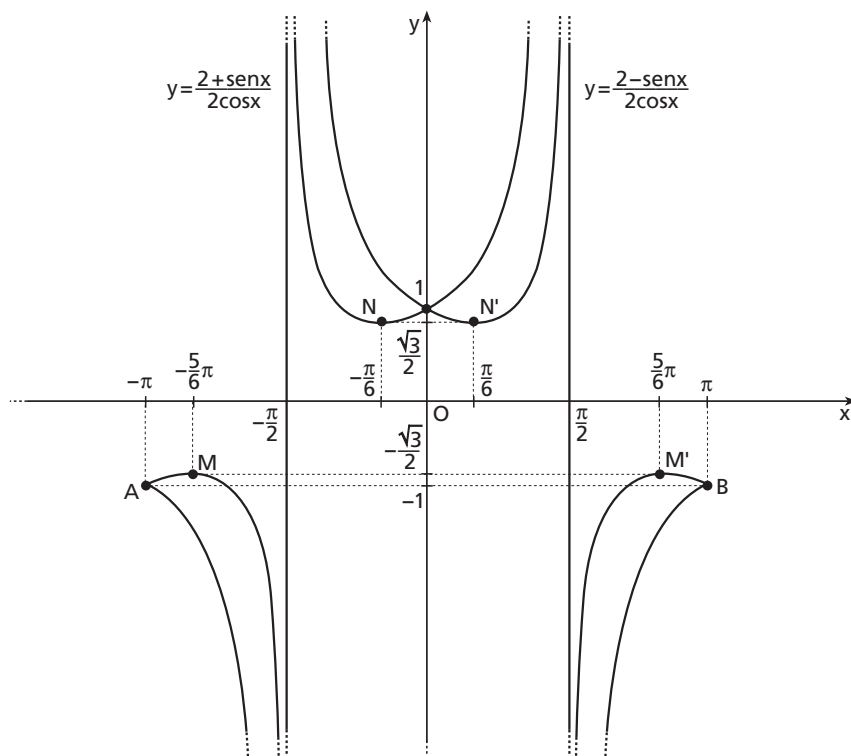
Si osserva che la derivata seconda non si annulla mai: non è quindi soddisfatta la condizione necessaria per l'esistenza di punti di flesso.

Il grafico della funzione  $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$  è rappresentato nella figura 5.



◀ Figura 5.

Sfruttando la proprietà di simmetria tra le funzioni  $y = \frac{2 + \operatorname{sen} x}{2 \cos x}$  e  $y = \frac{2 - \operatorname{sen} x}{2 \cos x}$  rispetto all'asse  $y$ , è quindi ora possibile tracciare il grafico della seconda funzione (figura 6).



◀ Figura 6.