ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2013

PROBLEMA 1

La funzione f è definita da

$$\int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt$$

per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso $[0; 9]$.

1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$ ove f' indica la derivata di f.
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di f' e da esso si deduca per quale o per quali valori di x, $f'(x)$ presenta massimi e minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.
3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0; 2\pi]$.
4. Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \leq x \leq 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x, area $A(x) = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$. Si calcoli il volume di W.

PROBLEMA 1

1. Data la funzione integrale

$$f(x) = \int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] dt,$$

per il teorema del calcolo integrale la sua funzione derivata è la funzione integranda, ovvero:

$$f'(x) = \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Risulta allora:

$$f'(\pi) = \cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};\ f'(2\pi) = \cos\frac{2\pi}{2} + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

2. Consideriamo la funzione $f'(x) = \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$: il corrispondente grafico Σ si ottiene partendo dal grafico dalla funzione goniometrica $y = \cos x$, mediante una dilatazione orizzontale del tipo $y = \cos\left(\frac{x}{m}\right)$, con $m = 2$, e una traslazione verticale di vettore $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Tenuto conto della periodicità della funzione coseno e della dilatazione orizzontale, in $\mathbb{R}$ la funzione $f'(x)$ ha periodo $T = m \cdot 2\pi$, ovvero $T = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$.

Il grafico interseca l'asse x per $\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0$ ovvero:

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{x}{2} = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{4}{3}\pi + 4k\pi \quad \vee \quad x = \frac{8}{3}\pi + 4k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In particolare, nell'intervallo [0; 9] il grafico Σ interseca l'asse delle ascisse nei punti $x = \frac{4}{3}\pi$ e $x = \frac{8}{3}\pi$.

Inoltre la funzione coseno ha massimi assoluti nei punti $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e minimi assoluti nei punti $x_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto $f'(x)$ in $\mathbb{R}$ ha:

– massimi assoluti in $x_k = 2 \cdot 2k\pi = 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

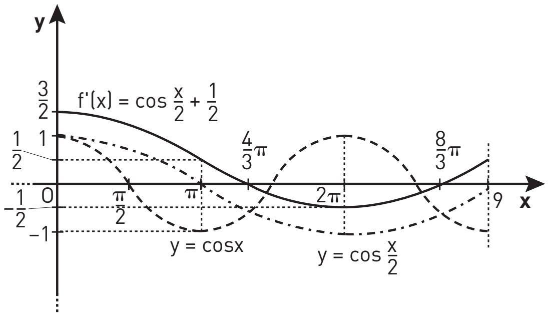
– minimi assoluti in $x_k = 2(2k+1)\pi = (4k+2)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

In particolare, nell'intervallo [0; 9] la funzione $f'(x)$ ha un massimo assoluto in $x = 0$ e un minimo assoluto in $x = 2\pi$.

La funzione coseno ha flesso nei punti $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Segue che $f'(x)$ in $\mathbb{R}$ ha flesso nei punti $x_k = 2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

In particolare, nell'intervallo [0; 9] la funzione $f'(x)$ ha flesso in $x = \pi$.

Ricaviamo il grafico Σ di $f'(x)$ nell'intervallo [0; 9] partendo dalla funzione cosinusoidale e applicando le suddette trasformazioni geometriche (figura 4).



▲ **Figura 4.**

Osservando il grafico Σ di $f'(x)$ possiamo fare le seguenti deduzioni:

– per $0 \leq x < \frac{4}{3}\pi$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) \leq 0 \quad \rightarrow \quad f$ crescente con concavità verso il basso;

– per $x = \frac{4}{3}\pi$, $f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 0$ e $f''\left(\frac{4}{3}\pi\right) < 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4}{3}\pi$ punto di massimo relativo per f;

– per $\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f$ decrescente con concavità verso il basso;

– per $x = 2\pi$, $f'(2\pi) = -\frac{1}{2}$ e $f''(2\pi) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2\pi$ punto di flesso ascendente per f;

– per $2\pi < x \leq \frac{8}{3}\pi$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f$ decrescente con concavità verso l'alto;

– per $x = \frac{8}{3}\pi$, $f'\left(\frac{8}{3}\pi\right) = 0$ e $f''\left(\frac{8}{3}\pi\right) > 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{8}{3}\pi$ punto di minimo relativo per f;

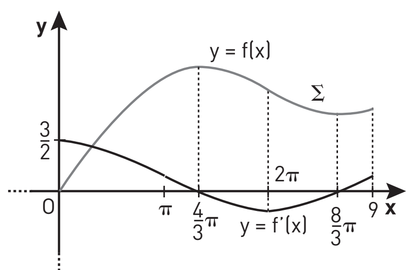
– per $\frac{8}{3}\pi < x \leq 9$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f$ crescente con concavità verso l'alto.

Inoltre:

– per $x = 0$ risulta $f(0) = \int_0^0 \left[\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right] dt = 0$;

– per $x = 9$ risulta $f(9) = \int_0^9 \left[\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right] dt = \left[2\,\mathrm{sen}\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^9 = 2\,\mathrm{sen}\frac{9}{2} + \frac{9}{2} \simeq 2{,}5$.

Rappresentiamo ora l'andamento della funzione $f(x)$ e della funzione $f'(x)$ (figura 5).



▲ **Figura 5.**

3. Poiché $f'(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[0; 2\pi]$, per il teorema della media esiste almeno un punto z di tale intervallo tale che:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi - 0}\int_0^{2\pi} f'(x)dx, \text{ con } f'(z) \text{ detto valor medio della funzione } f'(x) \text{ in tale intervallo.}$$

In tal caso risulta:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left[2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(0 + \pi - 2\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 0\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Si consideri il solido W, con base R definita dalla regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \leq x \leq 4$, e con sezioni ortogonali all'asse x di area $A(x) = 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

Il volume V di W ha quindi espressione:

$$V = \int_0^4 A(x)dx = \int_0^4 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx = 3\cdot\frac{4}{\pi}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_0^4 = -\frac{12}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) =$$

$$= -\frac{12}{\pi}(-1-1) = \frac{24}{\pi}.$$