ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2013

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$.

1. Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy. Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti $P(-2; 1)$ e $Q(2; 1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ. Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.
2. Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro $(0; 1)$. Una retta t per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta di equazione $y = 2$ in un punto B. Si provi che, qualunque sia t, l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate $(x; y)$ di un punto di Φ.
3. Si consideri la regione R compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo $[0; 2]$. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da Γ e si provi altresì che la regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il cerchio.
4. La regione R, ruotando intorno all'asse y, genera il solido W. Si scriva, spiegandone il perché, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2013

PROBLEMA 2

1. Consideriamo la funzione razionale fratta $f(x)=\dfrac{8}{4+x^2}$. Essendo $4+x^2>0\ \forall\ x\in\mathbb{R}$, essa ha come dominio l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.
È una funzione pari poiché

$$f(-x)=\frac{8}{4+(-x)^2}=\frac{8}{4+x^2}=f(x),$$

pertanto il suo grafico Φ è simmetrico rispetto all'asse delle y.
Le intersezioni con gli assi cartesiani si trovano risolvendo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} y=0 \\ y=\dfrac{8}{4+x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{8}{4+x^2}=0 \end{cases} \rightarrow \nexists\ x\in\mathbb{R};$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{8}{4+x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{8}{4}\rightarrow y=2 \end{cases}.$$

Il grafico Φ non interseca l'asse x ma interseca l'asse y nel punto $(0; 2)$.
La funzione è sempre positiva in $\mathbb{R}$.
Valutiamo gli eventuali asintoti calcolando i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{4+x^2}=0,$$

pertanto il grafico ha come asintoto orizzontale l'asse delle ascisse $y=0$.
Studiamo la derivata prima della funzione e il suo segno:

$$f'(x)=\frac{-8(2x)}{(4+x^2)^2}=-\frac{16x}{(4+x^2)^2}.$$

Osservando che il denominatore della derivata prima è sempre positivo, si deduce che:

- $f'(x)>0$ per $x<0 \rightarrow$ il grafico Φ è crescente;
- $f'(x)=0$ per $x=0 \rightarrow$ il grafico Φ ha un massimo;
- $f'(x)<0$ per $x>0 \rightarrow$ il grafico Φ è decrescente;

quindi la funzione ha un punto di massimo assoluto in $x=0$ e il grafico Φ ha un massimo assoluto nel punto $M(0; 2)$.
Studiamo la concavità del grafico mediante lo studio del segno della derivata seconda:

$$f''(x)=-16\,\frac{(4+x^2)^2-x\cdot 2(4+x^2)\cdot 2x}{(4+x^2)^4}=-16\,\frac{(4+x^2)[(4+x^2)-4x^2]}{(4+x^2)^4}=-16\,\frac{(4-3x^2)}{(4+x^2)^3}=$$

$$=16\,\frac{3x^2-4}{(4+x^2)^3}.$$

Osservando che il denominatore della derivata seconda è sempre positivo si può dedurre che:

- $f''(x)>0$ per $3x^2-4>0\rightarrow x<-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ \vee\ x>\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\rightarrow$ il grafico Φ ha concavità verso l'alto;
- $f''(x)<0$ per $3x^2-4<0\rightarrow -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\rightarrow$ il grafico Φ ha concavità verso il basso;

$$f''(x) = 0 \text{ per } 3x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad \text{il grafico } \Phi \text{ ha due flessi.}$$

Determiniamo le coordinate di tali flessi:

$$f(x) = \begin{cases} x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \dfrac{8}{4+x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \dfrac{8}{4+\dfrac{4}{3}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow F_1\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{2}\right) \text{e } F_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{2}\right).$$

In figura 6 è rappresentato il grafico Φ della funzione $f(x)$.

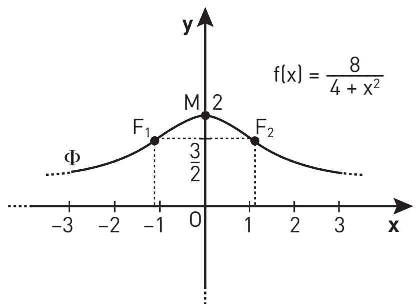


Figura 6.

Consideriamo i punti $P(-2; 1)$ e $Q(2; 1)$ della curva. Ricordiamo che data una funzione f derivabile in un punto x_0, l'equazione della retta tangente al corrispondente grafico in tale punto è:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Poiché $f'(x) = -\dfrac{16x}{(4+x^2)^2}$, risulta:

$$f'(-2) = -\frac{16(-2)}{(4+(-2)^2)^2} = \frac{1}{2} \text{ e } f'(2) = -\frac{16 \cdot 2}{(4+2^2)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Ricaviamo le equazioni delle rette tangenti nei punti P e Q secondo la formula sopraindicata:

$$\text{per } P(-2; 1)\text{: } y = \frac{1}{2}(x+2) + 1 \quad \rightarrow \quad t_1 : y = \frac{1}{2}x + 2,$$

$$\text{per } Q(2; 1)\text{: } \quad y = -\frac{1}{2}(x-2) + 1 \quad \rightarrow \quad t_2 : y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Osserviamo che tali tangenti si intersecano nel punto $M(0; 2)$, avendo la stessa intercetta all'origine. In figura 7 sono rappresentate le rette tangenti trovate e le rette OP e OQ.

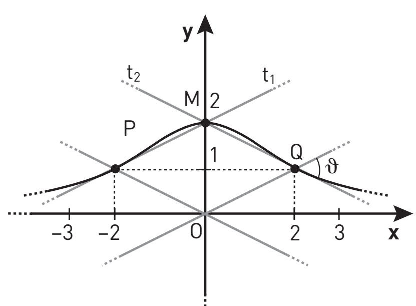


Figura 7.

Consideriamo il quadrilatero $POQM$ e verifichiamo se i lati sono a due a due paralleli.

Il coefficiente angolare della retta OP vale:

$$m_{OP} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

pertanto la retta OP è parallela alla retta t_2.
Analogamente il coefficiente angolare della retta OQ risulta:

$$m_{OQ} = \frac{1}{2},$$

pertanto la retta OQ è parallela alla retta t_1.
Segue allora che il quadrilatero $POQM$ è un parallelogramma.
Osserviamo inoltre che le sue diagonali, PQ e OM, sono perpendicolari, ciò è sufficiente per affermare che si tratta di un rombo.
Valutiamo l'ampiezza degli angoli $M\hat{P}O$ e $M\hat{Q}O$ tramite la misura dell'angolo ϑ a essi congruente formato dalle rette t_2 e OQ:

$$\operatorname{tg} M\hat{P}O = \operatorname{tg} M\hat{Q}O = \operatorname{tg}\vartheta = \left| \frac{m_{OQ} - m_{t_2}}{1 + m_{OQ} \cdot m_{t_2}} \right|,$$

con m_{OQ} e m_{t_2} rispettivamente i coefficienti delle rette OQ e t_2.
Risulta allora:

$$\operatorname{tg} M\hat{P}O = \operatorname{tg} M\hat{Q}O = \operatorname{tg}\vartheta = \left| \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \right| = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad \vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}13\ldots° \simeq 53°\ 8'.$$

Pertanto:

$$M\hat{P}O = M\hat{Q}O = \vartheta \simeq 53°\ 8'.$$

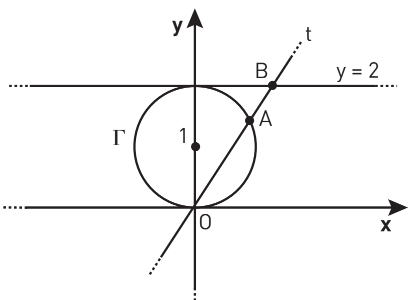
Essendo gli angoli $P\hat{O}Q$ e $P\hat{M}Q$ congruenti e supplementari agli angoli $M\hat{P}O$ e $M\hat{Q}O$ per proprietà dei parallelogrammi si ricava:

$$P\hat{O}Q = P\hat{M}Q \simeq 180° - 53°\ 8' = 126°\ 52'.$$

2. La circonferenza di raggio 1 e centro (0; 1) ha equazione:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

Una retta t per l'origine degli assi, ha equazione $y = mx \lor x = 0$. Essa interseca la circonferenza in O e in A, mentre taglia la retta di equazione $y = 2$ in un punto B (figura 8).



◀ **Figura 8.**

Troviamo l'ordinata di A risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + (mx)^2 - 2(mx) = 0 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1 + m^2)x^2 - 2mx = 0 \\ y = mx \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow O: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \; A: \begin{cases} x=\dfrac{2m}{1+m^2} \\ y=\dfrac{2m^2}{1+m^2} \end{cases}$$

e il sistema (caso particolare):

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad O: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \; A \equiv M: \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}.$$

Determiniamo l'ascissa di B tramite il sistema:

$$\begin{cases} y=2 \\ y=mx \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{2}{m} \\ y=2 \end{cases}, \text{ con } m \neq 0.$$

e il sistema (caso particolare):

$$\begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad B \equiv M.$$

Il luogo geometrico dei punti con ascissa uguale all'ascissa di B e con ordinata pari a quella di A ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{m} \\ y=\dfrac{2m^2}{1+m^2} \end{cases}, \text{ con } m \neq 0 \vee \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}.$$

Troviamo l'equazione cartesiana del luogo:

$$\begin{cases} m=\dfrac{2}{x} \\ y=\dfrac{2m^2}{1+m^2} \end{cases}, \text{ con } x \neq 0 \rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{2}{x} \\ y=\dfrac{2\left(\dfrac{2}{x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2}=\dfrac{8}{x^2+4}. \end{cases}$$

Si conclude che il luogo geometrico cercato ha equazione:

$$y=\begin{cases} \dfrac{8}{x^2+4}, & x \neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$

equivalente alla funzione di partenza $f(x)=\dfrac{8}{4+x^2}$ che ha grafico Φ.

3. Consideriamo la regione R compresa tra Φ e l'asse x nell'intervallo $[0; 2]$.
Calcoliamo l'area $\mathcal{A}$ di tale regione tramite il seguente integrale definito:

$$\mathcal{A}(R)=\int_0^2 \frac{8}{4+x^2}\,dx=8\int_0^2 \frac{1}{4\left[1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\right]}\,dx=2\int_0^2 \frac{2\cdot\dfrac{1}{2}}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\,dx=4\int_0^2 \frac{\dfrac{1}{2}}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\,dx=$$

$$= 4\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^2 = 4(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = 4\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \pi.$$

Il cerchio delimitato da Γ, avendo raggio unitario, ha area pari a πr^2 ovvero a π. Pertanto R è equivalente al cerchio delimitato da Γ.

Determiniamo l'area della regione compresa tra Φ e tutto l'asse x calcolando il seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8}{4+x^2}\,dx.$$

Sfruttando il procedimento del precedente integrale e la simmetria del corrispondente grafico possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8}{4+x^2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{8}{4+x^2}\,dx = 2 \cdot 4\left(\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \operatorname{arctg} 0\right) = 8\,\frac{\pi}{2} = 4\pi,$$

pertanto la regione è equivalente a quattro volte il cerchio.

4. Ruotiamo la regione R intorno all'asse y e consideriamo il solido W generato dalla rotazione (figura 8).

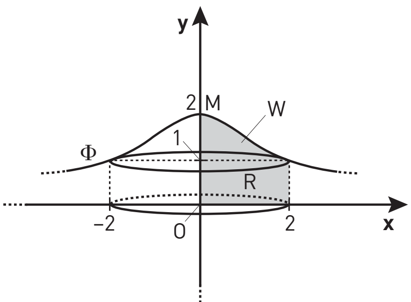


Figura 9.

Osservando la figura notiamo che il solido è formato da:

– un cilindro di raggio di base uguale a 2 e altezza pari a 1,

– un solido di rotazione generato dalla funzione inversa $x = f^{-1}(y)$, con $1 \le y \le 2$.

Da $y = f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$, ricaviamo $f^{-1}(y)$:

$$4 + x^2 = \frac{8}{y} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{8-4y}{y}}\,.$$

Il volume V del solido W è determinato dalla addizione del volume del cilindro con il volume del solido di rotazione, quindi:

$$V(W) = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 + \pi \int_1^2 \left(\sqrt{\frac{8-4y}{y}}\right)^2 dy = 4\pi + \pi \int_1^2 \frac{8-4y}{y}\,dy.$$