ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione suppletiva

6 Dimostrare che, se la derivata di una funzione reale di variabile reale $f(x)$ è nulla per ogni x di un dato intervallo J, allora $f(x)$ è costante in J.

6 Si prendano due punti x_1 e x_2 con x_1, $x_2 \in J$ e $x_1 < x_2$. Essendo J un intervallo, risulta $[x_1; x_2] \subseteq J$. Poiché la funzione è derivabile in J per ipotesi, essa è continua e derivabile nell'intervallo $[x_1; x_2]$. È quindi applicabile su tale intervallo il teorema di Lagrange, cioè esiste almeno un punto $c \in]x_1; x_2[$ tale che:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Per ipotesi, la derivata della funzione è nulla nell'intervallo J, per cui $f'(c) = 0$. Risulta allora:

$$f(x_2) - f(x_1) = 0, \text{ ovvero } f(x_2) = f(x_1).$$

Dunque la funzione assume lo stesso valore in x_1 e x_2.
Tenendo conto dell'arbitrarietà dei punti x_1 e x_2 nell'intervallo J, la funzione è quindi costante su tutto l'intervallo di definizione.