ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2012

PROBLEMA 1

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali da

$$f(x) = |27x^3| \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

1. Qual è il periodo della funzione g? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy.
2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando intorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2012

PROBLEMA 1

1. La funzione goniometrica $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ ammette periodo P se risulta $g(x+P) = g(x)$, quindi:

$$\operatorname{sen}\left[\frac{3}{2}\pi(x+P)\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x + \frac{3}{2}\pi P\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

Tenendo conto che il periodo della funzione seno è 2π, ne consegue che:

$$\frac{3}{2}\pi P = 2\pi \rightarrow P = \frac{4}{3}.$$

Studiamo la funzione $f(x) = |27x^3|$, scrivendola in questo modo:

$$f(x) = \begin{cases} 27x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ -27x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Essa ha dominio $\mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in tutto il dominio; poiché $f(-x) = f(x)$, la funzione è pari, pertanto il suo grafico G_f è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; interseca gli assi nel punto $O(0; 0)$; è non negativa nel proprio dominio.

Ricaviamo la derivata prima e il suo segno:

$$f'(x) = \begin{cases} 81x^2 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -81x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

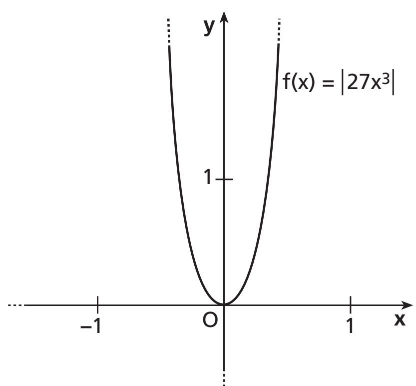
Risulta allora che $f'(x) > 0$ per $x > 0$, $f'(x) = 0$ per $x = 0$, $f'(x) < 0$ per $x < 0$: la funzione f ha pertanto minimo assoluto nel punto $x = 0$.

Studiamo la derivata seconda e il suo segno:

$$f''(x) = \begin{cases} 162x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -162x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Ne segue che $f''(x) > 0$ per $x \neq 0$ e il corrispondente grafico ha nel dominio concavità rivolta verso l'alto.

Nella figura 2 è rappresentato il grafico G_f di $f(x)$.



▲ **Figura 2.**

Analizziamo ora la funzione goniometrica $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ di periodo $\frac{4}{3}$. Si tratta di una contrazione orizzontale della funzione seno, del tipo $y = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{m}\right)$, con $m = \frac{2}{3\pi}$.

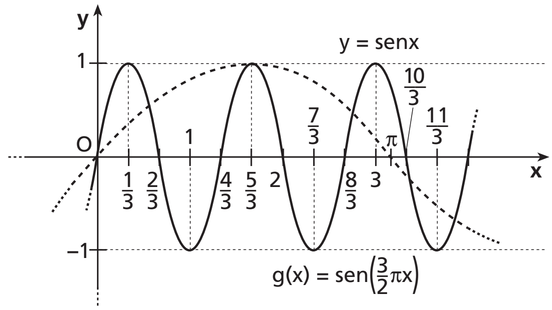
Ricordando che la funzione seno, $y = \operatorname{sen} x$, si annulla nei punti $x = k\pi$, ha massimi assoluti nei punti $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ha minimi assoluti nei punti $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, si deduce che la funzione $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$, per $k \in \mathbb{Z}$:

- si annulla nei punti $x = \frac{2}{3}k$,
- ha massimi assoluti nei punti $x = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}k$,

- ha minimi assoluti nei punti $x = 1 + \frac{4}{3}k$.

Nella figura 3 è rappresentato il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ e della sua contrazione orizzontale

$g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$.



▲ **Figura 3.**

2. Data una funzione generica $y = h(x)$, l'equazione della retta tangente al grafico di h nel punto $(x_0; y_0)$, quando la tangente esiste e non è parallela all'asse y, è:

$$y - y_0 = h'(x_0)(x - x_0).$$

Determiniamo l'equazione della retta r tangente alla funzione $f(x) = |27x^3|$ nel punto $x = \frac{1}{3}$, tenendo conto che $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ e $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 81\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9$:

$$y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right) \to y = 9x - 2.$$

Tale retta ha coefficiente angolare $m_r = 9$.

Consideriamo la funzione $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$: è noto dal punto 1 del problema che nel punto $x = \frac{1}{3}$ la funzione è dotata di massimo la cui ordinata vale 1; pertanto in tale punto la corrispondente tangente s è orizzontale, ha equazione $y = 1$ e coefficiente angolare $m_s = 0$.

Determiniamo la tangente goniometrica dell'angolo γ formato dalle rette r e s:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \to \operatorname{tg}\gamma = 9.$$

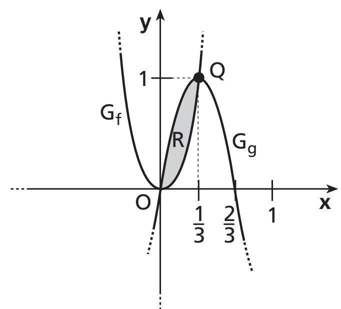
Ricaviamo il corrispondente angolo in gradi sessagesimali:

$$\gamma = \operatorname{arctg} 9 = 83{,}6598\ldots° \simeq 83°40'.$$

3. Rappresentiamo in uno stesso piano cartesiano i grafici G_f e G_g ed evidenziamo la regione R delimitata dalle due curve (figura 4).

Ricaviamo l'ascissa del punto Q, intersezione dei grafici risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = |27x^3| \\ y = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \end{cases} \to \begin{cases} y = |27x^3| \\ |27x^3| = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \end{cases}$$



▲ **Figura 4.**

La seconda equazione del sistema non è risolvibile algebricamente ma dallo studio dei grafici sappiamo che la soluzione è unica per $x > 0$. Ugualmente è noto dal punto 2 del problema che il punto $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ è comune a entrambi i grafici. Per unicità si deduce che $x_Q = \frac{1}{3}$.

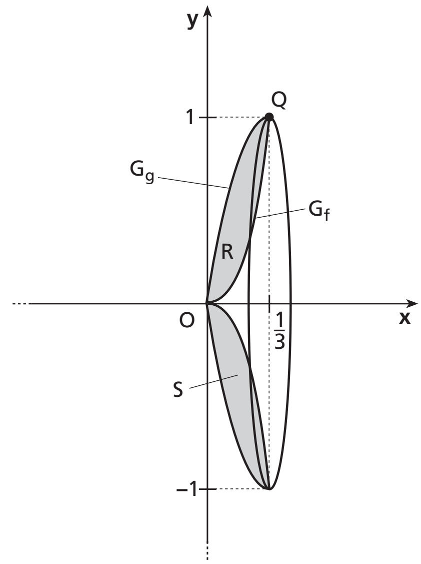
Calcoliamo l'area della regione R tramite il seguente integrale:

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^3\right] dx = \left[-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - \frac{27}{4}x^4\right]_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= -\frac{27}{4}\cdot\frac{1}{81} + \frac{2}{3\pi} = \frac{2}{3\pi} - \frac{1}{12}.$$

4. Rappresentiamo in figura 5 il solido S generato dalla rotazione della regione R intorno all'asse x.
Osserviamo che il volume del solido S si ottiene dalla differenza tra due volumi:

– il volume V_g del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della parte di piano delimitata dalla funzione $g(x)$, dalla retta $x=\frac{1}{3}$ e dall'asse positivo delle ascisse;
– il volume V_f del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della parte di piano delimitata dalla funzione $f(x)$, dalla retta $x=\frac{1}{3}$ e dall'asse positivo delle ascisse.



▲ **Figura 5.**

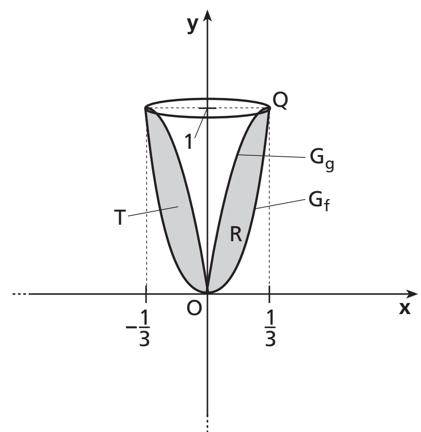
Risulta allora:

$$V(S) = V_g - V_f = \pi\int_0^{\frac{1}{3}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right)dx - \pi\int_0^{\frac{1}{3}} (27x^3)^2 dx =$$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{3}} \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 729x^6\right]dx.$$

Rappresentiamo in figura 6 il solido T generato dalla rotazione della regione R intorno all'asse y.
Osserviamo che il volume del solido T si ottiene dalla differenza tra due volumi:

– il volume $V_{f^{-1}}$ del solido generato dalla rotazione intorno all'asse y della parte di piano delimitata dalla funzione $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$, dalla retta $y = 1$ e dall'asse positivo delle ordinate;
– il volume $V_{g^{-1}}$ del solido generato dalla rotazione intorno all'asse y della parte di piano delimitata dalla funzione $g^{-1}(y) = \frac{2}{3\pi}\operatorname{arcsen} y$, dalla retta $y = 1$ e dall'asse positivo delle ordinate.



▲ **Figura 6.**

Risulta quindi:

$$V(T) = V_{f^{-1}} - V_{g^{-1}} = \pi\int_0^1 \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{y}\right)^2 dy - \pi\int_0^1 \left(\frac{2}{3\pi}\operatorname{arcsen} y\right)^2 dy = \pi\int_0^1 \left(\frac{1}{9}\sqrt[3]{y^2} - \frac{4}{9\pi^2}\operatorname{arcsen}^2 y\right)dy.$$