ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2013

PROBLEMA 1

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0; +\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2; 4)$ passa per $(0; 0)$, mentre le rette $y = 8$ e $y = 0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ, rispettivamente.

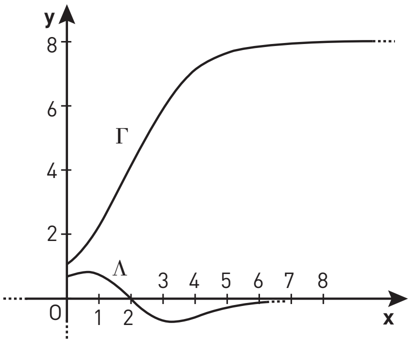


Figura 1.

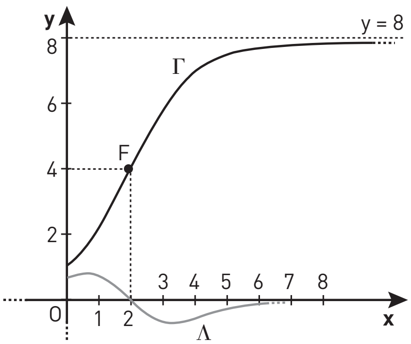
1. Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$, qual è il possibile andamento di $f'(x)$?
2. Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?
3. Se Γ è il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{a}{1 + e^{b-x}}$, si provi che $a = 8$ e $b = 2$.
4. Nell'ipotesi del punto 3., si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0; 2]$.

PROBLEMA 1

1. Consideriamo la funzione $f'(x)$ e osserviamo nella figura 2 il segno della sua derivata prima $f''(x)$ ovvero il grafico Λ:

- $f''(x) > 0$ per $0 \leq x < 2 \quad \to \quad f'(x)$ crescente;
- $f''(x) = 0$ per $x = 2 \quad \to \quad x = 2$ punto stazionario per $f'(x)$;
- $f''(x) < 0$ per $x > 2 \quad \to \quad f'(x)$ decrescente.

La funzione $f'(x)$ ha quindi un solo punto stazionario, in particolare ha un massimo per $x = 2$.



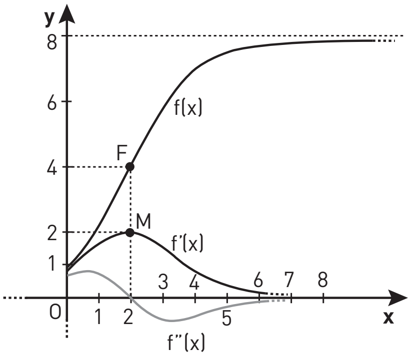
▲ **Figura 2.**

Per calcolare la sua ordinata, $f'(2)$, consideriamo la retta tangente al grafico Γ di $f(x)$ nel suo punto di flesso $F(2; 4)$. Sapendo che tale retta passa per l'origine O, essa ha equazione $y = f'(2) \cdot x$.
Imponiamo il passaggio per $F(2; 4)$:

$$4 = f'(2) \cdot 2 \quad \to \quad f'(2) = 2.$$

Il punto di massimo assoluto del grafico di $f'(x)$ ha quindi coordinate $M(2; 2)$.
Per ipotizzare un possibile andamento di $f'(x)$ si osserva dalla figura che la funzione $f(x)$ è sempre crescente e che ha asintoto orizzontale per $x \to +\infty$: ciò comporta che la sua derivata prima $f'(x)$ è sempre positiva e che $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ ovvero che $y = 0$ è asintoto orizzontale per il grafico della funzione $f'(x)$.
Rappresentiamo in figura 3 un possibile grafico della derivata prima, tenendo conto che:

$$f''(x) \leq f'(x) \leq f(x).$$



◀ **Figura 3.**

2. Se $f(x)$ rappresenta il modello di crescita di un certo tipo di popolazione, possiamo considerare il suo tasso di crescita in funzione della variabile x come la sua derivata prima, ovvero $f'(x)$. Osserviamo che il tasso di crescita:

- aumenta per $0 \leq x < 2$ $\rightarrow$ la popolazione aumenta sempre più rapidamente;
- ha un massimo per $x = 2$ $\rightarrow$ in tale punto si registra un flesso nell'andamento del modello;
- diminuisce per $x > 2$, tendendo a 0 per $x \rightarrow +\infty$ $\rightarrow$ la popolazione cresce ma sempre meno rapidamente fino a stabilizzarsi sul valore 8.

3. Posto $f(x) = \dfrac{a}{1+e^{b-x}}$, è noto che per il punto 1 la funzione passa per il punto $F(2; 4)$ e che $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 8$. Imponiamo tali condizioni:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1+e^{b-2}} = 4 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a}{1+e^{b-x}} = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1+e^{b-2}} = 4 \\ a = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{1+e^{b-2}} = 4 \\ a = 8 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2 = 1 + e^{b-2} \\ a = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 8 \end{cases}.$$

Pertanto risulta:

$$f(x) = \frac{8}{1+e^{2-x}}.$$

4. L'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0; 2]$ è:

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f''(x)dx.$$

Per il teorema del calcolo integrale risulta:

$$\int_0^2 f''(x)dx = f'(2) - f'(0).$$

Al punto 1 si era trovato $f'(2) = 2$.

Calcoliamo, nota $f(x) = \dfrac{8}{1+e^{2-x}}$, la sua derivata prima nel punto $x = 0$:

$$f'(x) = \frac{-8e^{2-x}(-1)}{(1+e^{2-x})^2} \rightarrow f'(0) = \frac{8e^2}{(1+e^2)^2}.$$

Quindi ricaviamo:

$$\mathcal{A} = 2 - \frac{8e^2}{(1+e^2)^2}.$$