SIMULAZIONE DI PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO

PROBLEMA 1

Considera la famiglia di funzioni

$$f_k(x)=\begin{cases} k\ln x^x & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases} \qquad k>0$$

e la funzione $g(x)=\begin{cases} \ln x^{x^2} & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$.

1. Determina per quale valore di k la funzione f_k e g hanno la stessa tangente nel punto di ascissa 1.
2. Detta f la funzione determinata al punto precedente, studia la continuità e la derivabilità di f e g nel punto $x=0$.
3. Studia le funzioni f e g e disegna i grafici riferiti allo stesso sistema cartesiano ortogonale.
4. Calcola l'area della regione finita di piano delimitata da f e da g, appartenente al semipiano $x\geq\frac{1}{4}$.

SOLUZIONE DELLA SIMULAZIONE D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO

PROBLEMA 1

1. Riscriviamo le funzioni applicando le proprietà del logaritmo:

$$f_k(x) = \begin{cases} kx\ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} \quad k > 0; \qquad g(x) = \begin{cases} x^2\ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Tutte le funzioni date sono continue e derivabili per $x > 0$, con derivate:

$$f'_k(x) = k\ln x + k, \quad g'(x) = 2x\ln x + x \quad \text{quindi } f'_k(1) = k,\ g'(1) = 1.$$

Perciò f_k e g hanno la stessa tangente in $x = 1$ se $f'_k(1) = g'(1)$, ossia se

$k = 1$.

2. Indichiamo con $f(x)$ la funzione $f_1(x)$ corrispondente a $k = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \to 0^+} x\ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \qquad \text{(De L'Hospital)} \qquad \text{pertanto } f \text{ è continua per } x = 0.$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h\ln h - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \ln h = -\infty.$$

La f non è derivabile in $x = 0$ nel senso che la derivata diverge negativamente quindi ha per tangente l'asse delle ordinate.

$$\lim_{x \to 0^+} x^2\ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = 0, \text{ pertanto } g \text{ è continua in } x = 0.$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2\ln h - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} h\ln h = 0.$$

La g è derivabile in $x = 0$ e ha per tangente l'asse delle ascisse.

3. Studio di f e g.
Segno di f e intersezioni con gli assi:

$x\ln x > 0$ per $x > 1$ $\quad \rightarrow$ $f(x) < 0$ se $0 < x < 1$
$f(x) > 0$ se $x > 1$
$f(1) = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} x\ln x = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$\rightarrow$ f non ha asintoti orizzontali né obliqui.

Derivata prima: crescenza e decrescenza,
massimi e minimi:

$f'(x) = \ln x + 1 > 0$ per $x > e^{-1}$ $\rightarrow$ f è crescente per $x > e^{-1}$
f è decrescente per $0 < x < e^{-1}$
$A(e^{-1}; -e^{-1})$ minimo relativo e assoluto.

$f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0 \ \ \forall x > 0$ $\rightarrow$ concavità verso l'alto.

Segno di g e intersezioni con gli assi:

$x^2 \ln x > 0$ per $x > 1$ $\rightarrow$ $g(x) < 0$ se $0 < x < 1$
$g(x) > 0$ se $x > 1$
$g(1) = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} x^2 \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$ $\rightarrow$ g non ha asintoti orizzontali né obliqui.

Derivata prima: crescenza e decrescenza,
massimi e minimi:

$g'(x) = x(2\ln x + 1) > 0$ per $x > e^{-\frac{1}{2}}$ $\rightarrow$ g è crescente per $x > e^{-\frac{1}{2}}$
$\rightarrow$ g è decrescente per $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$
$B\left(e^{-\frac{1}{2}}; -\dfrac{1}{2}e^{-1}\right)$ min. rel. e assoluto.

$g''(x) = 2\ln x + 3 > 0$ per $x > e^{-\frac{3}{2}}$ $\rightarrow$ concavità verso l'alto per $x > e^{-\frac{3}{2}}$
concavità verso il basso per $0 < x < e^{-\frac{3}{2}}$
$C\left(e^{-\frac{3}{2}}; -\dfrac{3}{2}e^{-3}\right)$ punto di flesso.

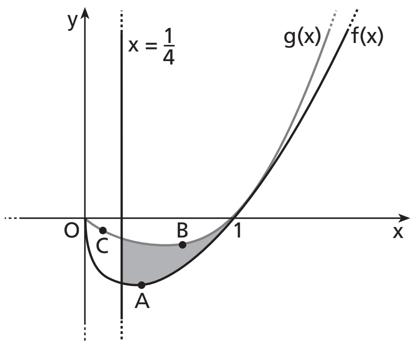

Figura 1.

4. L'area richiesta è data dal seguente integrale che calcoleremo per parti:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1} (x^2 \ln x - x \ln x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^2}{2}\ln x\right]_{\frac{1}{4}}^{1} - \int_{\frac{1}{4}}^{1} \left(\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{192}\ln 4 - \frac{1}{32}\ln 4 - \int_{\frac{1}{4}}^{1} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2}\right) dx = -\frac{5\ln 4}{192} - \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{4}}^{1} = \ldots = \frac{1}{8} - \frac{5\ln 2}{96}.$$